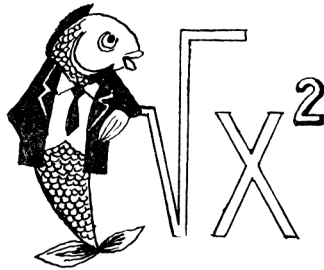


В. А. Уфнаровский

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АКВАРИУМ

Второе издание, стереотипное



Москва
Издательство МЦНМО
2011

УДК 51
ББК 22.1
У88

Уфнаровский В. А.

У88 Математический аквариум. — 2-е изд., стереотипное. — М.: МЦНМО, 2011. — 232 с.: ил.
ISBN 978-5-94057-733-1

Книга посвящена нескольким ярким фрагментам из различных областей математики. В каждой задаче указывается не только решение, но и тот путь, по которому к нему можно прийти. Изложение материала свободное. Поэтому читатель может почувствовать, как именно рождаются решения математических задач.

Книга рассчитана на широкий круг лиц, интересующихся математикой, в первую очередь — школьников старших классов, а также на будущих абитуриентов и участников олимпиад.

Предыдущее издание книги вышло в 2010 году.

ББК 22.1

ISBN 978-5-94057-733-1

© Уфнаровский В. А., 2011.
© МЦНМО, 2011.



ПРЕДИСЛОВИЕ

Водных животных, способных причинить вред человеку, можно разделить на четыре основные категории: кусающие, во главе с пресловутой акулой; колющие, которые впрыскивают жертвам яд; ядоносные, которые, если их съесть, вызывают болезненные ощущения или смерть; оглушающие, которых отличает способность оглушать или убивать генерируемым ими электрическим током.

Т. Дозье. Опасные морские создания

Прекрасен и необъятен математический океан. Однако мало кому удаётся безболезненно достичь его глубин и познать всю ту красоту, которая сокрыта на его дне. Но если посчастливилось окунуться в захватывающий мир математического творчества, то уже почти невозможно удержаться от желания хоть как-то показать другому великолепную структуру математики. И если нет возможности увлечь читателя за собой в глубины этого океана (а не каждому дано преодолеть волны математических формул и мыслей, да при этом не испугаться его подводных обитателей), то собрать маленький и спокойный аквариум симпатичных жителей математических морей уже под силу. За прозрачным отшлифованным стеклом мир математики будет не столь пугающим даже для начинающего, но столь же блистательным для каждого, кто умеет видеть красоту. А она, красота, и есть содержание математики.

Итак, читатель, ты приглашаешься на безобидную, но, хочется верить, бесполезную прогулку по уголкам математического аквариума.

Несколько слов о том, как написана книга. Главная цель её — показать, как именно рождаются решения задач. Как из грубых, запутанных рассуждений и поисков получаются

коротенькие, чистые решения, единственный недостаток которых — непонятно, как их можно придумать сразу. К сожалению, именно такие «очищенные» решения и приводятся в большинстве учебников, поэтому в данной книге их почти не будет. Зато к большинству разобранных задач будет приложен несколько необычный текст, называемый «поиском решения». Именно этот текст и определил особенности (а значит, как недостатки, так и достоинства) изложения материала.

Теперь — для кого написана книга. Основной читатель — это школьник старших классов, будущий абитуриент и, возможно, уже участник математических олимпиад. Кроме того, книга предназначена учителям математики и просто тем, кто влюблён в неё. В соответствии с этим в книге выделено три уровня изложения, которые легко определить по задачам, приведённым в первой вступительной главе. Главный читатель — это тот, кому понятна первая задача. Что-то разобравшие во второй задаче и готовые взяться за третью, словом, читатели, почувствовавшие вкус к олимпиадным задачам, определяют второй уровень. Третий уровень составляют читатели, для которых понятен набросок решения четвёртой задачи. Такой уровень нужен только в отдельных местах книги, которые к тому же можно безболезненно пропустить. В любом случае основные усилия были приложены к тому, чтобы читать было интересно даже в тех местах, где уровень изложения не соответствует уровню подготовки читателя.

Многие главы, особенно первые, содержат полезный материал для абитуриентской практики. По ходу текста для самостоятельного решения предлагаются задачи (разного уровня), но задачи главы «Тренажёр» имеют прежде всего олимпиадную направленность.

Обязательно ли решать задачи? Это зависит от того, что вы хотите получить от книги. Если вы настроились полистать её, чтобы полюбоваться картинками и насладиться отдельными местами текста (а такой способ чтения несколько не предрасположителен, так как особенно приятен), то вполне достаточно

Предисловие

знакомства с формулировками — может быть, они вызовут у вас улыбку необычностью постановки задачи. Если ваш интерес методологический, то есть «устройство аквариума и выбор рыбок» вас волнует больше, чем их «жизнь», то и тут вряд ли у вас появится желание решать что-то, хотя не исключено, что какая-то из задач вас привлечёт особенно сильно. Ну а если вы решили использовать книгу как отправную точку путешествия а математический океан? Что ж, тогда задачи лучше решать, но не все и не сразу. Попробовать «на вкус» можно много, но лучше сначала выбрать те, которые кажутся особенно привлекательными или совсем простыми, и на них потратить побольше времени. Самая большая польза будет от решения тех задач, которые в книге разобраны. Если каждое решение читать только после того, как попытаешься его сам найти, то эффект будет максимальным. Правда, следовать этому совету намного труднее, чем давать его...

Надо отметить, что книга рассчитана скорее на многократное пользование, чем на одноразовое прочтение. В определённой мере она может служить справочником-коллекцией различных математических методов решения задач. Поэтому некоторые места специально написаны в полурекламном стиле: чтобы идея или метод пробилась в подсознание и через некоторое время вам мучительно вспоминалось: что-то я по этому поводу где-то читал. И, может быть, тогда вам захочется перелистать страницы ещё раз. Во всяком случае сделать это будет нетрудно, так как зависимость одной главы от другой — минимальная.

Ну а теперь — к делу!

1



НА ГАЗЕТЕ ДО ВЕНЕРЫ



1. На газете до Венеры

Этого не может быть, потому что этого не может быть никогда.

А. П. Чехов. Письмо к учёному соседу

...Поскольку подошло время футбольного матча, вы оторвались от газеты и сложили её пополам. Немного поразмыслив, вы решили, что не помешает взять газету с собой, и, сложив её ещё несколько раз, затиснули в карман. И тут родилась

♣ **Задача.** А какова будет толщина газеты, если её сложить 50 раз?

Конечно, в какой-то момент газету уже и не согнёшь, но, в крайнем случае, её можно и разрезать. Итак, читатель, оцени на глаз, какова же будет толщина: 10 см? 1 м? 100 м? 1986 км? Может, больше? Может, до Венеры хватит?

Решение. Как ни странно, понадобится только арифметика, да ещё немного веры в правильность вычислений. Итак, если сложить газету один раз, то она станет толще вдвое, если два раза — то в четыре, то есть 2^2 , три раза дадут два в третьей степени..., десять — два в десятой, пятьдесят — два в пятидесятой (2^{50}). Чтобы упростить счёт, заметим, что 2^{10} — это 1024, т. е. приблизительно 10^3 . Значит, толщина газеты увеличится не меньше чем в 10^{15} раз, ибо $2^{50} = (2^{10})^5$ больше, чем $(10^3)^5 = 10^{15}$. Если считать, что толщина газеты равняется 0,1 мм, то общая толщина оказывается равной 10^{14} мм, или 10^{11} м, или 10^8 км — итого сто миллионов километров — только ненамного меньше, чем расстояние до Солнца, но до Венеры (в противостоянии) наверняка хватит.

Задача эта достаточно проста и общеизвестна, чтобы на её примере попробовать проанализировать, в чём состоят сильные и слабые стороны математического рассуждения. В чём сильные стороны — в общем-то понятно: недоступная с первого взгляда постановка задачи оказалась сведённой к совершенно стандартным и заурядным вычислениям. Хитрость-то, однако, заключается в том, что математика здесь выступает в двух обликах: как элементарная математика (т. е. тот са-

мый набор стандартных вычислений) и как искусство сводить более сложную задачу к более простой. Именно это искусство и составляет основную сложность и содержание математического рассуждения, и именно ему труднее всего научить. К сожалению, довольно-таки большой груз элементарных навыков и сведений, необходимых для свободного владения основным искусством, производит на учащихся столь тяжкое впечатление, что математика так и остаётся для них набором запутанных формул и непонятных рассуждений. В то же время математик-профессионал, как правило, формул не помнит, а рассуждения придумывает сам, запоминая только идеи. Надо ли говорить, что это намного экономичнее и полезнее! Автор считал бы основную цель, поставленную перед собой при написании этой книги, достигнутой, если бы ему удалось привить читателю вкус к искусству решать задачи «методом идей».

Поговорим немного и о слабостях. Пожалуй, одним из наиболее уязвимых мест математического подхода является то, что процесс абстракции, присущий математическому подходу, зачастую может двести за пределы реального мира даже в тех случаях, когда решаются вполне реальные задачи. Приведённая задача как раз служит показательным образцом такого рассуждения. Ведь ни один здравомыслящий человек не согласится, что это (совершенно строгое с математической точки зрения) вычисление приводит к достоверным результатам. Хотя указать ошибку вроде тоже трудно. Более того, для этой же задачи, но с десятью складываниями результат не вызовет никаких сомнений. Так с какого же момента пропадает вера в правдоподобность результата? Вместо ответа другой вопрос: а какова будет площадь сложенной газеты?

Как и каждая слабость, эта слабость доставляет удовольствие. Удовольствию пренебречь здравым смыслом и проследить, куда могут завести строгие и чопорные математические методы, мы и посвятим эту короткую главу, разобрав несколько задач, ответ в которых неприемлем с точки зре-

1. На газете до Венеры

ния нормального человека (это не значит, что математики ненормальные!). Если отдельные места покажутся читателю сложными, он может читать их как художественный текст, поскольку эта глава только вступительная, а большинство последующих написано о вещах более знакомых и так, чтобы их понимание требовало не столько знаний, сколько желания понять.

✦ **Задача о кирпичной лестнице.** Когда барону Мюнхгаузену надоело летать на ядре, он изобрёл новый способ узнавать, что делается во вражеской крепости. Для этого Мюнхгаузен решил построить кирпичную лестницу, кладя один кирпич на другой ступеньками, как на рис. 1, благо кирпичей было



Рис. 1. Кирпичная лестница разведчика Мюнхгаузена

сколько угодно. К несчастью, цемента в его распоряжении не оказалось, так что кирпичи могли держаться только за счёт силы тяжести. Барону предложили построить что-нибудь понадежнее, но он заявил, что и без цемента сможет построить лестницу, вполне достаточную, чтобы преодолеть «несколько жалких миль». Сильно ли заврался барон Мюнхгаузен? Другими словами, насколько вправо может быть сдвинута кирпич-

ная лестница, если считать, что каждый кирпич имеет по 30 см в длину? (Подчеркнём, обсуждается только математический вопрос, именно способ, когда каждый кирпич, опираясь лишь на один, сдвинут немного вправо относительно него. Что же касается архитектурных подходов к этой задаче — как именно построить надёжную лестницу, то автору довелось услышать множество красивейших проектов, самый простой из которых — засыпать ров перед крепостью, а если понадобится, и саму крепость, пользуясь тем, что кирпичей неограниченное количество.)

Прежде чем читать решение, попытайтесь самостоятельно сделать набросок вычислений или начните строить лестницу из косточек домино.

РЕШЕНИЕ. То, что с практической точки зрения проект барона Мюнхгаузена, как всегда, безнадёжен, сомнений не вызывает. Гораздо труднее поверить в то, что чисто теоретически барон совершенно прав: как бы далеко ни была расположена крепость, всё равно до неё на такой лестнице можно добраться (при достаточно большом количестве кирпичей) и оказаться в точности над ней. Чтобы убедиться в этом, проанализируем, насколько вправо можно отодвигать кирпичи. Если кирпичей под рукой нет, возьмём домино или, на худой конец, просто стопку книг. Главное условие — это условие равновесия. Постараемся понять, в чём оно состоит. Из школьного учебника мы смутно помним о том, что для равновесия нужно, чтобы центр тяжести находился под ногами, точнее — проектировался на подошвы ног. Но это для человека. Значит, для лестницы необходимо, чтобы её центр тяжести проектировался на самый нижний кирпич. Попробуем на практике. С двумя кирпичами оптимальный результат достигается довольно-таки быстро: достаточно один из кирпичей сместить относительно другого ровно на половину. Хорошо! Попробуем сверху положить ещё один и тоже сместить его на половину в ту же сторону. Рушится. Странно. А если меньше сместить? Тоже рушится. А если совсем чуть-чуть? Опять падает. Почему? Ну конечно

1. На газете до Венеры

же, центр тяжести системы из двух кирпичей находится совсем не там, где у одного! А где, кстати? Несложный подсчёт показывает, что центр тяжести системы из двух кирпичей, один из которых смещён наполовину, смещён ровно на четверть относительно нижнего кирпича. Что же делать? Получается где-то так: только ты уравнишь кирпичи, как следующий кирпич грозит разрушить всю конструкцию. (В этот момент задачу уже не очень хочется решать.) Попробуем всё-таки установить три кирпича. Итак, первый — внизу, второй — смещён на четверть вправо, третий — вправо ещё на полкирпича. Итого сдвинулись вправо на 7,5 плюс 15, т. е. на 22,5 см. Это уже что-то! Самое интересное, что верхние два кирпича стоят, как и раньше, — смещённые на половину. И тут — идея: а что, если следующий, четвёртый, кирпич класть не сверху, а подкладывать снизу! Куда? Вычисление несложное (проведите его самостоятельно) и показывает, что у нас появилась возможность сдвинуться на одну шестую. Следующий кирпич мы опять будем подкладывать снизу и сдвинемся уже на одну восьмую и так далее по чётным числам (подсчёт мы опускаем по причине известности задачи, а на картинку стоит посмотреть — рис. 2).

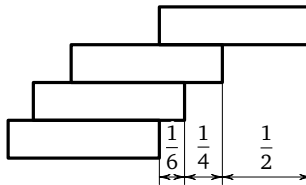


Рис. 2. Шаткое равновесие

Единственный вопрос, который осталось решить, уже не имеет никакого отношения к кирпичам — насколько большой может быть сумма чисел, обратных чётным? «Умножив» вопрос на два, получим равносильный: насколько большой может быть сумма $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots + 1/k$ при неограничен-

ном возрастании k ? Эта сумма настолько знаменита, что имеет своё собственное имя — «гармонический ряд» (при неограниченном числе членов бесконечные суммы переименовываются в ряды). Пожалуй, нет смысла повторять многократно написанное доказательство того, что этот ряд расходится, или, другими словами, что указанная сумма может быть сделана неограниченно большой. Доказательство можно найти в любом учебнике по высшей математике в главе «Ряды». Суть же доказательства читатель поймёт на кирпичах. Если не стремиться к самому крайнему положению, то достичь крепости можно и таким способом: самый верхний кирпич сдвинут на $1/2$, следующий — на $1/4$, два следующих — на $1/8$, четыре последующих — на $1/16$ и так далее по степеням двойки. Читатель должен сам убедиться в том, что при этом способе мы сдвигаем кирпичи не так сильно (и, значит, тем более остаётся в равновесии), а то, что сдвиг будет сколь угодно большой, можно проверить несложным расчётом: сдвинув на $1/4$, получим 7,5 см. Два сдвига на $1/8$ дают ещё 7,5 см, четыре сдвига на $1/16$ — ещё 7,5 см. Вот так, по 7,5 см, мы и наберём сколько нам надо. Стало быть, и до крепости доберёмся.

Вопрос для искушённых в математических тонкостях: а с какой высоты придётся смотреть на крепость барону Мюнхгаузену при самом оптимальном варианте? Может, лестница до Венеры достанет?

Следующая симпатичная задача заимствована из книги М. Гарднера о математических парадоксах «А ну-ка, догадайся!».

♣ **Задача.** Представим себе резиновый шнур длиной 1 км. По нему не торопясь, со скоростью 1 см/с, ползёт червяк. Ясно, что не скоро, но до конца он доползёт. Для того чтобы жизнь не казалась ему раем, каждую секунду шнур дополнительно растягивают на 1 км. Спрашивается, доползёт ли он в таких усложнённых условиях?

Не желая лишать читателя удовольствия самостоятельно найти решение и отсылая его за ним к книге М. Гарднера, всё

же заметим, что при растяжении шнура червяк тоже немного переносится, а тогда идея гармонического ряда снова может оказаться небесполезной.

Последняя задача — для проверки интуиции тех, кто уверенно овладел многомерными пространствами. Итак, представим себе k -мерный куб с длиной ребра, равной 2. Этот куб разбит естественным образом на 2^k маленьких кубиков со стороной, равной 1 (автор представлять себе k -мерные кубы не умеет, поэтому предпочитает изображать картинку (см. рис. 3)

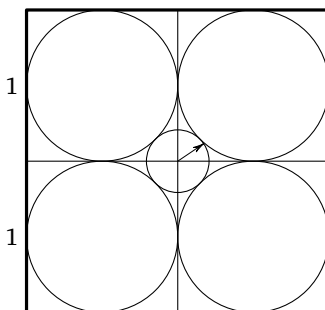


Рис. 3. К чему стремится радиус r_k внутренней сферы?

на двумерном, т. е. на квадрате). В каждый из этих кубиков вписана сфера (естественно, k -мерная сфера единичного радиуса). Существуют две сферы, которые касаются всех этих сфер: одна, большая, касается внутренним образом, другая, меньшая, — внешним. Пусть r_k — радиус меньшей и $r = \lim_{k \rightarrow \infty} r_k$. Избавим читателя от необходимости вычислять этот предел, а сразу сообщим ему, что он перечислен в следующем ряду: $-1, 0, 1/2, 1, 10$, бесконечность. Вопрос на интуицию читателя: чему же он всё-таки равен? Рекомендуется расставить ответы в порядке правдоподобности, начиная с наименее правдоподобного. Считать запрещается.

Решение. Интуиция подводит очень многих. Правильный ответ — бесконечность. Убедиться в этом нетрудно, если рассмотреть диагональ куба. Её длина $2\sqrt{k}$ стремится к бесконеч-

1. На газете до Венеры

ности. На ней располагаются три окружности: две радиусом 1 и одна радиусом r_k , касающаяся двух предыдущих (рис. 4).

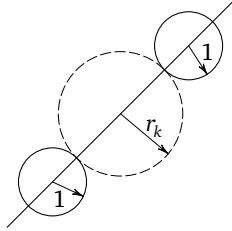


Рис. 4. А вот как всё выглядит на диагонали

А тогда нетрудно понять, чему равен радиус r_k и почему он стремится к бесконечности. Интуиция же не срабатывает потому, что трудно себе представить, как сфера, казалось бы, находящаяся внутри, может выйти за пределы куба.

ИСКУССТВО ОБОЗНАЧАТЬ,
ИЛИ ПРИНЦИП «БЯКИ»



2. Искусство обозначать, или принцип «бьяки»

Придайте глубины печать
Тому, чего нельзя понять.
Красивые обозначенья
Вас выведут из затрудненья.

Гёте. Фауст

Цель настоящей главы — показать ту огромную роль, которую играет в математике, казалось бы, бессмысленное искусство правильно выбирать обозначения. В известной мере это — даже основное умение, которым должен владеть математик.

Для начала убедимся, что не всё равно даже то, как обозначать числа. Вспомним о римской нумерации. На первый взгляд нет большой разницы между обозначениями XX и 20. Однако попробуйте, например, умножить XX и IX, не переходя к обычным обозначениям! Тут-то и выясняется, что каждое обозначение имеет свои достоинства и недостатки, а потребность в каком-либо обозначении определяет степень удобства работы с ним. Так, может быть, всё дело в том, что есть плохие и хорошие обозначения, и, значит, надо пользоваться хорошими и не пользоваться плохими? Нет, и здесь всё не так просто. Например, не так уж трудно убедиться, что десятичная система тоже не идеальна, например, с точки зрения ЭВМ. Действительно, чтобы работать с десятью цифрами, их надо хотя бы различать, а как это реализовать так, чтобы надёжность была высока? Гораздо проще было бы, если бы цифр было только две: 0 и 1. Тогда имеется и надёжная интерпретация: есть ток или нет тока. Весьма удобна также таблица умножения: $0 \times 0 = 0$, $0 \times 1 = 0$, $1 \times 1 = 1$. И никаких проблем! Читатель может доставить себе удовольствие, придумав самостоятельно, какими техническими средствами эту таблицу можно реализовать. Как ни странно, трудности возникают при сложении, точнее, только в одном месте: сколько будет $1 + 1$? От цифры 2 мы ведь уже отказались. Что же делать? А что, если положить $1 + 1 = 10$? (другими словами, обозначить двойку комбинацией 10). Сколько же будет тогда дважды два? В нашем при-

2. Искусство обозначать, или принцип «бьяки»

вычном мире это — четыре, а $10 \times 10 = 100$. Кроме того, такое умножение соответствует введённому закону умножения. Нам просто не остаётся никакого другого выхода, как *обозначить* число четыре через 100. Дальше уже проще. Дважды четыре — восемь, значит, так как $10 \times 100 = 1000$, то 1000 есть обозначение для числа восемь. Точно так же 10000 — обозначение для 16 и так далее по степеням двойки. Ну а как же теперь обозначать, скажем, пятёрку? Да очень просто. Раз $5 = 4 + 1$, то пятёрка представляется комбинацией цифр $101 = 100 + 1$. Точно так же тройку придётся обозначать 11. Ну и так далее. Всё? Если бы! Пока это только интуитивный набросок хорошей идеи. А чтобы реализовать её строго, надо чётко решить следующие вопросы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Требуется дать однозначное определение каждого числа, желательно единообразное по форме (пока это сделано только для степеней двоек).

КОРРЕКТНОСТЬ. Требуется доказать, что данное обозначение согласуется с введёнными операциями умножения и сложения, например, что $5 = 2 + 3$. Ведь последнее равенство мы тоже вполне могли бы взять за основу обозначения для числа 5, но где гарантия, что получилось бы то же самое? (Вопросы корректности, обычно редко принимаемые во внимание, на самом деле, одни из самых тонких.)

На самом деле большинство читателей уже давно поняли, что речь идёт о хорошо известной двоичной системе счисления. Поэтому не стоит делать вид, будто бы мы совершили какое-то открытие и что все указанные вопросы — проблемы. Для читателей, сталкивающихся с этим впервые, напомним, как легко и естественно вводится двоичная система счисления. Если ABC — десятичная запись какого-то числа k , то $k = 100A + 10B + C$, что в общем-то понятно, ибо A — число сотен, B — десятков, C — единиц. В двоичной же записи $k = 4A + 2B + C$, причём A, B, C — цифры не больше единицы. (Здесь 4 и 2 записаны в десятичной системе. Если и их записать в двоичной, то получится $100A + 10B + C$.)

2. Искусство обозначать, или принцип «бьяки»

Всё это известно, но, чтобы заронить у читателя каплю сомнения, поставим следующий вопрос: а что получилось бы, если бы мы положили в качестве обозначения для двойки сочетание 11? А если 110, 1000? Тут вопросы определения и корректности — огромный простор для деятельности читателя. Маленькая подсказка: правило перенесения единицы в следующий разряд в общем-то ни на чём не основано. Почему, в самом деле, мы обязаны её прибавлять? Тогда комбинация 110 приведёт к системе счисления с основанием (-2) и с совершенно нестандартными законами сложения и умножения многозначных чисел (а понять суть законов деления — это целое исследование).

Вернёмся, однако, к анализу удобства обозначений. Так ли уж хороша двоичная система? Всё-таки не слишком: уж больно длинными бывают обозначения совсем коротких чисел (сколько цифр, например, в двоичной записи числа 9999?). Поэтому человек тоже не испытывает особого удовольствия при общении с машиной на её двоичном языке. Оказывается, наиболее приемлемой для обоих является система счисления, в основу которой положена степень двойки, скажем, 8 или 16. С одной стороны, запись довольно компактна для человека, с другой — переход в двоичную систему происходит мгновенно — надо только переписать каждую цифру. Например, 55 в восьмеричной системе счисления переводится как 101101. В десятичной системе нет даже намёка на такое удобство. Там 55 переводится как 110111. Остаётся только сожалеть, что у нас на руках десять пальцев, а не восемь (кроме удобства общения с машиной нам это облегчило бы труд по запоминанию таблицы умножения).

Вот ещё один интересный пример, подсказанный ЭВМ. Как записывать отрицательные числа? Мы это делаем просто — с помощью знака, и нам кажется, что это удобно. А как это делает ЭВМ? Ответ оказывается нетривиальным. Прежде всего отметим, что в любой ЭВМ отведено строго определённое количество разрядов, скажем k , для каждого числа.

2. Искусство обозначать, или принцип «бьяки»

В каждом из разрядов хранится цифра 0 или 1. Один, самый старший, разряд отведён под знаки. Казалось бы, чего же более: 0 — это плюс, 1 — минус, и всё в порядке. Однако в машине так просто решается вопрос только с положительными числами: последние разряды заняты значащими цифрами, а первые, включая знаковый, занимают незначащие нули. Если же число отрицательное, то вместо него записывается двоичное представление числа, равного разности 2^k и исходного числа. Как следствие, в знаковом разряде оказывается единица. (Надо помнить, что при этом запрещается использовать для работы на ЭВМ числа большие, чем $2^{k-1} - 1$.) Для ясности приведём пример. Допустим, что в машине под каждое число отводится четыре разряда (хилая машина!). Тогда число +5 будет в ней храниться как 0101, а -3 — как 1101.

Зачем нужны такие хитрости? А вот зачем. При таком способе хранения отрицательные числа ничем не отличаются от положительных с точки зрения операций сложения. Попробуйте и убедитесь, что обычные правила сложения автоматически следят за знаками и дают верные результаты. Следует только помнить, что при переполнении, когда мы обязаны выйти за границу k -го разряда, эта необходимость попросту игнорируется: если некуда записывать, то и не будем! А представьте себе, как неприятно было бы в противном случае: каждый раз надо было прежде всего смотреть, какие знаки у складываемых чисел, и в зависимости от этого выбирать законы сложения. Люди-то к такому привыкли, но это не самое большое неудобство, к которому они привыкли.

Этим запас обозначений для чисел, однако, далеко не исчерпан. Вот ещё несколько примеров.

✦ **Задача.** Доказать, что любое натуральное число k однозначно представимо в виде $A \times 1! + B \times 2! + C \times 3! + \dots$, где A не превосходит единицы, B — двух, C — трёх и так далее. Напомним, что в таком контексте восклицательный знак называется факториалом и $k!$ обозначает произведение всех чи-

2. Искусство обозначать, или принцип «бьяки»

сел от 1 до k включительно. Например, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$, $21 = 3 \cdot 3! + 1 \cdot 2! + 1 \cdot 1!$.

Система счисления, вводимая этой задачей, называется факториальной и, как ни удивительно, очень удобна для решения на ЭВМ важной задачи определения простых делителей заданного натурального числа, да и вообще полезна, в частности, для всяких олимпиадных задач. Следующая задача должна вызвать законное негодование просвещённого читателя.

❖ **Задача.** Доказать, что любое натуральное число однозначно раскладывается в произведение своих простых делителей.

Позвольте, но это же известно ещё из школы! Правильно, известно, но всё-таки вряд ли вы, уважаемый читатель, знакомы с соответствующим доказательством. Попробуйте показать это самостоятельно, не пользуясь ничем, кроме определения простого числа как числа, имеющего ровно два натуральных делителя — себя и единицу. А вот такой факт, что если произведение двух чисел делится на 5, то и один из сомножителей делится на 5, на веру не принимайте — его тоже надо доказывать. Да не забудьте проверить оба утверждения: во-первых, что разложение действительно существует, а во-вторых, что оно единственно! Заметим, что если бы оба факта были так тривиальны, как это кажется, то знаменитая проблема Ферма была бы решена ещё во времена Куммера (хотя какая тут взаимосвязь — разговор особый и не для этой книги). Читатель, заинтригованный именами Ферма и Куммера, может обратиться, например, к книге М. М. Постникова «Теорема Ферма».

Теперь в нашем распоряжении ещё один способ обозначать числа — как последовательности A, B, C, \dots , где A — количество двоек, B — троек, C — пятёрок, в разложении данного числа k в произведение простых. Например, числу 84 соответствует последовательность 2, 1, 0, 1, ... (остальные нули), а последовательностью 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, ... зашифровано число 210. Для закрепления — две простые задачи: во-первых, показать, что

2. Искусство обозначать, или принцип «бьяки»

в любой такой последовательности — только конечное число элементов, не равных нулю, во-вторых, зашифровать k -ю степень тысячи.

Есть ли, однако, какой-то смысл в обозначении одного числа целой последовательностью чисел? Есть! Это обозначение чрезвычайно удобно для мультипликативных задач, т. е. для таких, в которых речь идёт только об операциях, связанных с умножением и делением. Ведь произведению двух чисел соответствует почленное сложение последовательностей — очень удобно. (А как на этот язык переводится деление, нахождение общего кратного, общего делителя?) Но немультимпликативные задачи не всегда есть смысл решать, основываясь на таком обозначении. Даже простейший вопрос, какой из двух данных последовательностей отвечает большее число, очень нетривиален. Например, какое число больше — зашифрованное сотней единиц подряд, идущих от начала, или одной единицей, стоящей на тысячном месте? Всё сказанное ещё раз подтверждает: *каждое обозначение хорошо на своём месте, и для каждой задачи имеет смысл прежде всего продумать, а в каких обозначениях её лучше всего решать?*

Чтобы сказанное не осталось пустыми словами, постараемся отрететировать один приём искусства обозначения, особенно ценный для абитуриента. Самое главное — это вовремя ввести обозначения. А чтобы знать, когда это «вовремя» наступило, каждый абитуриент должен усвоить *принцип бьяки*:

УВИДЕЛ БЯКУ — ОБОЗНАЧЬ!

Как понимать столь сомнительно сформулированный «рецепт»? Прежде всего, так: если задача выглядит столь отпугивающе, что даже не хочется за неё браться, хотя вы точно знаете, что решение (причём несложное) у неё есть (типичная ситуация для абитуриента), то это, скорее всего, означает, что в задаче вас напугала какая-то бьяка. Её и надо обозначить.

2. Искусство обозначать, или принцип «бяки»

✦ ПРИМЕР. Решить уравнение

$$2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 3.$$

Можно было бы, конечно, выбрать пример и пострашнее, но усваивать идеи лучше на простых. Итак, предположим, что нас напугала эта задача. Ищем бяку. Вот она — синус, да ещё в квадрате. Значит, сразу её и обозначаем через y . Следующий (и очень важный) вопрос — что ещё через эту бяку можно выразить? Такой целенаправленный вопрос позволяет довольно скоро припомнить основное тригонометрическое тождество и выразить квадрат косинуса через $1 - y$. В результате уравнение приобретает вид

$$2^y + 2^{1-y} = 3.$$

Стала ли задача легче (хотя бы на вид)? Без сомнения! Это хороший признак правильно выбранного обозначения. Что делать дальше? Опять ищем бяку. На сей раз верный кандидат на неё — 2^y . Обозначив бяку через z , попробуем выразить через неё оставшиеся. Опять же нацеленность на бяку поможет нам скорее вспомнить свойства показательной функции и прийти к уравнению

$$z + \frac{2}{z} = 3.$$

А это уже почти квадратное уравнение, которое рекомендуется решать самому, не забыв затем найти по z неизвестное y , а по y — искомое x .

Внимание, читатель! Если ты ничего не понял в приведённом решении, то прежде всего попытайся найти его сам, пользуясь всем, что понять всё-таки удалось. Если и после этого ничего не понятно, то тебе необходим основательный ликбез с помощью обычного школьного учебника, по крайней мере, в том случае, когда впереди — вступительные экзамены. Впрочем, это не означает, что дальнейшее чтение бесполезно.

Вернёмся к самому примеру. Можно ли было обозначить только синус? Конечно, ведь после этого задача всё равно

2. Искусство обозначать, или принцип «бяки»

стала бы проще (к этому мы и стремимся — ведь все мы умеем решать только простые задачи, а учимся искусству сводить к ним сложные). А можно ли было обозначить самую большую бяку — $2^{\sin^2 x}$? Это ещё лучше, но только важно не увлекаться и подбирать обозначения так, чтобы через них всё можно было выразить, а умение сразу увидеть, как выразить через одну достаточно большую бяку все остальные, приходит только после достаточно продолжительной тренировки.

Теперь о другой причине целесообразности использования принципа бяки. Она скорее из области психологии. Наш мозг устроен так, что мы не способны сразу решать многоидейные, многоходовые задачи. Обычно мы, глядя на то, что имеем, ищем первую идею. Зафиксировав её в уме (а предпочтительнее — на бумаге), мы уже способны увидеть следующую идею и т. д. Между прочим, стоит отметить, что в процессе поиска идей полезно «раскручивать» задачу не только с начала, но и с конца (типичная постановка вопроса: а чего хватило бы, чтобы решить задачу?). Так вот, независимо от того, с начала или с конца мы берёмся за задачу, очень важно увидеть первый, а ещё лучше — основной шаг. Но что значит увидеть? Это означает увидеть что-то знакомое. А раз так, то первоочередная задача — привести всё в более или менее привычную форму. Именно для этой цели и используются всевозможные обозначения. Кроме того, они позволяют сократить и упростить заданную информацию.

Теперь несколько практических рекомендаций по использованию принципа бяки. *Первая рекомендация:* прежде чем решать задачу, посмотрите, что в ней можно обозначить. *Вторая:* чем большую бяку вы сумеете обозначить, тем легче придётся дальше. Единственное ограничение — после введённого нового обозначения старая переменная по возможности должна исчезнуть (если вы ввели новый y , то, будьте добры, постарайтесь, чтобы всё оказалось выраженным через y). *Третья:* очень полезно вместе с обозначением описывать также его свойства. Например, если вы обозначили $\sin x$ через y ,

2. Искусство обозначать, или принцип «бьяки»

то полезно тут же выписать, что y заключён между 1 и (-1) . Впоследствии вам это может помочь отбросить лишние корни или, наоборот, подсказать единственное решение.

✦ ПРИМЕР. Решить уравнение

$$|\sin x - \sin y| + \sin x \sin y = 0.$$

ГРУБОЕ РЕШЕНИЕ. На этом этапе мы будем искать только идею, позволив себе рассуждать нестрого. Сразу видны две независимые бьяки $\sin x$ и $\sin y$, которые мы тут же обозначим буквами a и b соответственно, отметив на всякий случай, что они заключены между 1 и (-1) . Теперь уравнение примет вид

$$|a - b| + ab = 0.$$

Так как модуль неотрицателен, то, чтобы уравнение имело решение, необходимо, чтобы ab было отрицательным, то есть a и b должны иметь разные знаки. После этого мы можем считать, что от модуля мы взяли всё возможное, и попробовать его проигнорировать, т. е. рассмотреть уравнение $a - b + ab = 0$. Из него получаем $a = b/(1 + b)$. Так как b не меньше (-1) , то отсюда сразу видно, что a и b должны иметь одинаковый знак, т. е. решений нет.

«Чистка» решения. Во-первых, надо исправить все нестрогости. Прежде всего припомнить, что кроме отрицательных и положительных чисел бывают также и нули. Тогда кое-какие решения всё-таки появятся (какие?). Во-вторых, честно проделать работу с модулем, рассмотрев, как и полагается, два случая: когда $a - b$ больше нуля и когда не больше. При этом оказывается, что они очень похожи, так что сразу приходит мысль свести второй случай к первому. Так, например, если поменять одновременно знак у a и b , то второй случай сведётся к первому, т. е. достаточно рассматривать только один случай. Наконец, можно проанализировать, так ли уж существенно были использованы ограничения на величину a и b . И, самое главное, найти новое и более короткое решение. Результатом подобной чистки может быть какое-нибудь такое

2. Искусство обозначать, или принцип «бьяки»

РЕШЕНИЕ. Если $\sin x = 0$, то автоматически $\sin y = 0$, откуда легко найти x и y . Аналогично при $\sin y = 0$. Поэтому можем считать, что оба выражения ненулевые. Докажем, что в этом случае решений нет. Действительно, заметим прежде всего, что $\sin x$ и $\sin y$ должны иметь разный знак, так как модуль неотрицателен. Далее, поменяв, если надо, у x и y знаки, мы можем опустить знак модуля и переписать уравнение так:

$$(1 - \sin x)(1 + \sin y) = 1.$$

Теперь видно, что оба сомножителя слева одновременно либо больше единицы, либо меньше. И то и другое ведёт к противоречию.

Контрольный вопрос к читателю: была ли использована специфика синусов и можно ли таким же способом решать неравенство? Кстати, с неравенством эта задача была предложена десятиклассникам на Всесоюзной олимпиаде 1985 года.

К сожалению, в большинстве учебников можно найти только рафинированные решения, которые настолько отличаются от первоначальных, что удручённому читателю остаётся только удивляться: и как это люди придумывают такое, а затем прийти к грустному выводу, что эта наука не по его способностям. Ничего удивительного, ведь в таких решениях не только скрыт ход мысли, приведший к основной идее, но и саму идею-то не разыщешь. В частности, автор надеется, что приведённое «очищенное» решение представляет собой как раз подобный образец математического садизма (проведите эксперимент на ваших друзьях: кто из них поймёт это решение, не читая предшествующего текста?). На самом деле, никто не умеет сразу придумывать сложные решения. К ним приходят постепенно и простыми неторопливыми шагами, часто очень грубыми и неловкими, а иногда вообще ошибочными. В этой книге мы постараемся решать задачи именно так: грубо, неловко, но чтобы к основной идее приходило ясно и чётко. А «чистку» решения мы иногда и вообще не будем проводить, оставляя её в каче-

2. Искусство обозначать, или принцип «бяки»

стве упражнения. Приведём ещё один пример и ещё один рецепт.

Вначале — рецепт: *если бяк много, на старшую надо разделить*. Идея этого — в уменьшении количества бяк. Обычно она безотказно срабатывает в задачах типа

$$9^x + 4^x = 2(6^x),$$

где после деления на старшую бяку можно ввести одну новую $(2/3)^x$ и получить квадратное уравнение. Теперь — пример.

♣ **Задача.** Решить уравнение

$$3^x + 4^x = 5^x.$$

Поиск решения. В таком примере и рука-то не поднимается что-то обозначить: слишком много бяк. Стоп-стоп! Был какой-то совет по этому поводу: если бяк много, то на старшую надо разделить. Почему бы не попробовать? Тогда получится

$$(3/5)^x + (4/5)^x = 1.$$

Стала ли задача легче? Трудно сказать. Может быть, но куда идти дальше, всё равно не видно. Что ещё можно сделать? Искать хоть что-то знакомое. Знакома только комбинация цифр 3, 4, 5. Это вроде бы как-то связано с египтянами. Ба, так это же египетский треугольник: если стороны треугольника равны 3, 4, 5, то он прямоугольный (почему?). А зачем он нам? Да вроде бы ни к чему, хотя... Ну да, конечно, по крайней мере, одно решение этой задачи он даёт: $x = 2$. Ну что ж, и на том спасибо. Интересно, а ещё какие-то решения есть? А вдруг нет, тогда можно было бы попробовать это доказать и этого было бы достаточно. Но как доказывать подобные вещи? И вообще, почему в голову пришла мысль, что решений больше нет? Во всяком случае, понятно, почему нет больших решений: правая часть исходного уравнения, конечно же, растёт быстрее — больно уж солидная фигура пять в степени x . Хотя... А как бы это строго доказать? Сыграть на монотонности? А как? И левая, и правая части монотонно растут, и ещё неизвестно, какая быстрее.

2. Искусство обозначать, или принцип «бяки»

В этот момент наш взгляд должен упасть на уравнение с поделённой старшей бякой — и, ура, тут уже с монотонностью проблем нет. Правая часть — единица, т. е. константа, а левая — монотонно убывает (таковы уж свойства показательной функции). Значит, через единицу она пройдёт лишь один раз, т. е. решение, если оно существует, только одно. А решение есть — это мы уже знаем: $x = 2$.

«Чистка» решения предоставляется читателю, вместо неё проведём небольшой анализ того, как мы вышли на решение. Отметим следующие моменты. Во-первых, сам принцип бяки вроде бы и не использовался, но зато помог нам косвенным образом. Во-вторых, обратим внимание на нешаблонный путь доказательства — сначала решение угадывается (любым способом — от метода математической индукции до «метода» математической интуиции), а затем доказывается, что других решений попросту нет. Надо сказать, что в настоящей математической работе в отличие от абитуриентской практики этот метод играет определяющую роль, причём зачастую кроме ответа надо угадать ещё и задачу, т. е. чётко сформулировать вопрос (а это ох как непросто!). Третье и очень важное обстоятельство — нам очень помогло то, что второе уравнение было уже выписано, хотя с самого начала от него толку не было. Сформулируем это в виде правила:

любую идею надо довести до конца и записать.

Этот рецепт нужно неукоснительно соблюдать только из-за того, что наше внимание не способно управляться с несколькими объектами: две идущие подряд простые идеи найти труднее, чем одну сложную. Единственный способ сделать это — выписать первую идею. Освободив от неё голову, мы окажемся более способны на поиск второй.

Прежде чем переходить к олимпиадным вариациям на тему обозначений, хотелось бы обратиться к начинающим педагогам и отчаявшимся студентам и школьникам. Речь пойдёт только о вещах совершенно элементарных, но зачастую очень

2. Искусство обозначать, или принцип «бьяки»

трудно понимаемых, поэтому последующий материал будет представлять интерес скорее методический.

Начнём с контрольного вопроса:

$$f(x) = \frac{1+x}{2x+1}.$$

Не читая дальше, ответьте, чему равно $f\left(-\frac{1}{x}\right)$? Если вы ответили $-\frac{2x+1}{1+x}$, читайте дальнейшее очень внимательно — это очень важно для вас. Всё дело в том, что, как показывает опыт преподавания, одним из самых трудных барьеров в овладении математикой является... неумение подставить в формулу. Да-да-да, именно это, казалось бы, тривиальное умение подставлять в формулы оказывается нетривиальным, и ему надо обучать в первую очередь. На самом деле это — загадка чисто философского плана: переход от общего к частному сложнее перехода от частного к общему, как бы это ни казалось удивительным. Но к делу. Рецепт замены очень прост: *подставить в формулу нечто вместо x значит во всех местах формулы, где встречается x , вместо x написать это нечто, причём взятое в скобках. Затем надо раскрыть скобки и произвести упрощения.*

Например, в нашем случае мы получим

$$f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1+(-1/x)}{2(-1/x)+1}$$

и после упрощения придём к $\frac{x-1}{x-2}$. Вроде бы несложно, но отметим два обстоятельства. Во-первых, если бы мы не писали скобок, ничего хорошего у нас бы не вышло (уберите в приведённом примере скобки — получится ахиня). Во-вторых, чрезвычайно существенно, что мы выписали то, что получилось после замены. Как уже говорилось, важно освободить голову — тот же переход в уме с большей вероятностью привёл бы к ошибке. Конечно, понадобится несколько репетиций, чтобы усвоить этот простой, но важный приём, но они, репетиции, вообще нужны — о чём часто забывают.

2. Искусство обозначать, или принцип «бьяки»

Теперь о другой педагогической трудности. Представьте себе следующий диалог.

Вы. Известно, что x — отрицательное число. Каким будет число $(-x)$?

Школьник. Отрицательным.

Вы (несколько озадаченно). Почему?

Школьник. Потому что минус впереди.

Как, спрашивается, выпутаться из такой ситуации? Конечно можно прибегнуть к суровому внушению: «Ну сколько раз тебе говорить? Запомни раз и навсегда...» Но результат будет только локальный. Суть-то в том, что школьник... прав. Точнее, прав на своём уровне знаний. А чтобы убедиться в этом, рассмотрим выражение $-(-1 - 2)$. В этом ничем на вид не примечательном выражении имеются три знака «минус». Удивительно, однако, что все эти три минуса совершенно различные, они просто одинаковые обозначения разных вещей. Минус, который стоит перед единицей, — признак отрицательного числа, минус перед двойкой — операция вычитания, а вот первый минус, перед скобкой, — это минус, обозначающий совсем другую операцию — операцию изменения знака у числа. С этим минусом удобнее всего знакомиться с помощью калькулятора: на большинстве из них есть два минуса — простой и второй, обозначаемый обычно значком $/- /$. При нажатии кнопочки с таким значком число на индикаторе меняет знак. Так вот в выражении $-x$ используется как раз такой минус, но школьник этого не знает, а потому интерпретирует минус единственно известным ему способом — как признак отрицательного числа. Достаточно один раз ему это объяснить, и трудностей со знаками больше не будет (совет проверен на практике; диалог, впрочем, тоже имел место в действительности).

Мы подошли здесь к вопросу о культуре обозначений. Важно не только *что* обозначать, но и *как*. Для каждого класса задач есть свои наиболее применяемые обозначения. Например, n — обычное обозначение для натуральных чисел, ε —

2. Искусство обозначать, или принцип «бяки»

для сколь угодно малых положительных. Причина такого консерватизма всё та же — важно освободить голову от дополнительного обдумывания ситуации, и если обозначения будут стандартными, то гораздо быстрее будут вспоминаться и более надёжно применяться стандартные методы и идеи. Но это ещё не всё. Обозначение должно нести какой-то смысл и помогать пониманию. Вот ещё один пример из практики. Автор, пытаясь объяснить, что такое прямая и обратная теоремы, говорил так: «Предположим, что A и B — какие-то утверждения. Прямая теорема: если A , то B . Как будет звучать, обратная?» В большинстве случаев ответом служило молчание. И лишь гораздо позже была найдена правильная формулировка. Вот она: «Предположим, что у нас есть какая-то теорема. Например, такая: если тра-та-та, то ту-ру-ру. Это прямая теорема. А как будет звучать обратная?» Отвечали чаще всего хором: «Если ту-ру-ру, то тра-та-та». А в чём разница? Только в осмысленности обозначения. Обозначение A безлико, обозначение тра-та-та уже подразумевает некоторое высказывание, ассоциируется с живой речью.

Наконец, несколько слов об обозначениях в производных. Там принцип бяки — основной, но для того, чтобы его умело применить, надо сначала... переписать всю таблицу производных. Делается это так: берётся любая формула и преобразуется — вместо x пишется y , а в конце (и это самое главное) дописывается y' . Например, вместо формулы $(\sin x)' = \cos x$ надо записать $(\sin y)' = \cos y \cdot y'$. А теперь — очередной рецепт: *если производной данной функции нет в таблице производных, но можно что-то обозначить, то это и делается, и тогда вместо стандартной таблицы используется новая.*

✦ ПРИМЕР. Допустим, что надо вычислить $(\sin x^2)'$. Немедленно обозначаем $y = x^2$. Тогда имеем $(\sin y)' = \cos y \cdot y'$. После этого подставляем (в скобках!) $\cos(x^2)(x^2)'$. Последний шаг — второе вычисление производной: $\cos(x^2)2x$.

Приём этот очень прост, стандартен и требует только небольшой тренировки. Но, усвоив его, читатель перестанет

2. Искусство обозначать, или принцип «бьяки»

делать стандартные ошибки типа $(\sin 2x)' = \cos 2x$ (а в чём, кстати, ошибка?) и с помощью нескольких обозначений сможет запросто вычислять и более сложные производные типа $(\cos(\sin(\cos 3e^x)))'$.

Вернёмся, однако, к обещанным олимпиадным идеям. Под олимпиадным решением мы будем понимать применение стандартного метода в нестандартной ситуации и, что гораздо более редко, но более ценно, — нестандартные методы.

✦ ПРИМЕР. Решить уравнение

$$\sqrt{2}\left(x^3 + \frac{1}{x^3} + 7x + \frac{7}{x^2}\right) = 49 + 7x^2 + \frac{7}{x} + x + \frac{2}{x}.$$

Поиск решения. С первого взгляда на этот пример становится не по себе — слишком уж много всего наворочено. Однако давайте всмотримся внимательнее. Ясно, что не приведены все подобные. Особенно подозрительно то, что не приведена к лучшему виду сумма $\frac{7}{x}$ и $\frac{2}{x}$. Это явно намёк, но на что? Каков смысл в $\frac{7}{x}$? Ещё есть $\frac{7}{x^2}$. И вообще слишком много семёрок, 49 — это тоже семь в квадрате. Но какой от них толк? Попытаться вынести? А что делать с $\sqrt{2}$? Может, как-то разложить на множители? А как? Элементарные подступы не срабатывают. Вернёмся к $\frac{7}{x}$ и $\frac{2}{x}$. Возможно, в $\frac{2}{x}$ какой-то смысл? Есть ещё $\sqrt{2}$. И даже в слишком больших количествах. А всё же почему так много семёрок? Не может быть, чтобы в этом числе был какой-то глубокий смысл. Но может, смысл в том, что семёрок много? Возможно, но как его искать? А что, если... обозначить? Только что? $x + \frac{1}{x}$? Неясно. Обозначать надо бьяку. А что здесь бьяка? Семёрка? А что, если в самом деле? Не зря же она так выделяется. Обозначим на секунду семёрку через a . А какой в этом смысл? Однако любую идею, даже самую безумную, надо довести до конца и записать. Тем более, что идея очень смешная — обозначить семёрку через a . Получим

$$\sqrt{2}\left(x^3 + \frac{1}{x^3} + ax + \frac{a}{x^2}\right) = a^2 + ax^2 + \frac{a}{x} + x + \frac{2}{x}.$$

2. Искусство обозначать, или принцип «бьяки»

Ну, и что хорошего? Ниче... Стоп! Это же... квадратное уравнение относительно a ! А что, если его решить? То получатся... два корня (найди их сам, достаточно подготовленный читатель, это тоже нетривиально). А после исходное уравнение разложится на множители:

$$\left(7 - \sqrt{2}x + \frac{1}{x}\right)\left(7 - \frac{\sqrt{2}}{x^2} + x^2\right) = 0,$$

и дальше — уже стандартная работа (для достаточно подготовленного читателя).

Разумеется, это — очень нетривиальный пример, и, чтобы придумать такое решение, надо «съесть не одну собаку» вида

$$\left(\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^x = 4,$$

в котором первое, что надо сделать, — это обозначить обычное число $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ буквой, например буквой a . Тогда легче увидеть, что второе число будет записываться как $1/a$ и, значит, мы имеем дело с уравнением вида

$$a^x + \left(\frac{1}{a}\right)^x = 4,$$

на которое, по крайней мере, приятнее смотреть. Думаем, читатель и сам сумеет довести пример до конца, а также с удовольствием решит пример, в котором в правой части вместо 4 стоит 2^x .

А в целом можно сформулировать такой рецепт: *обозначать полезно не только неизвестные и сложные выражения, но и вполне конкретные числа.*

Коль скоро мы коснулись темы «Корни», то (хотя и не по теме) сформулируем ещё один полезный практический совет: *разность корней просит сумму, и наоборот.* Поясним это на примере.

♣ **Задача.** Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{x}$.

Даже плохо владея свойствами пределов, за этот пример можно смело браться.

2. Искусство обозначать, или принцип «бьяки»

РЕШЕНИЕ. Наверху разность корней домножим на сумму (а чтобы было честно — домножим и снизу). Цель — получить в числителе разность квадратов:

$$\frac{(\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x})(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})}{x(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})} = \frac{2+x - (2-x)}{x(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})}.$$

Сократить на x и подставить 0 вместо x просто и для неподготовленного читателя.

Очень полезны обозначения в работе с обратными тригонометрическими функциями. «Страшное» закливание, что арксинус — это функция, обратная синусу, никак не помогает в решении задач. Зато очень часто помогает такой простой совет: в задачах, в которых встретился $\arcsin x$, надо сразу ввести обозначение $y = \arcsin x$ и работать с системой

$$\begin{cases} \sin y = x, \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Для $\arccos x$ система немного другая:

$$\begin{cases} \cos y = x, \\ 0 \leq y \leq \pi. \end{cases}$$

✦ ПРИМЕР. Доказать, что $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$. Работаем по рецепту. Вводим два новых обозначения: $y = \arcsin x$; $z = \arccos x$. Тогда имеем две системы:

$$\begin{cases} \sin y = x, \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos z = x, \\ 0 \leq z \leq \pi. \end{cases}$$

Зная только это, нужно доказать, что

$$y + z = \frac{\pi}{2}.$$

В такой форме работа уже намного привычнее и глазу приятнее. Сразу запишем равенство $y = \frac{\pi}{2} - z$, к которому просится

2. Искусство обозначать, или принцип «бьяки»

приписаться синус:

$$\sin y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right),$$

или, по формулам приведения, $\sin y = \cos z$, т. е. $x = x$. Всё? Ну нет. Когда требуется что-то доказать, используют три пути: первый — исходя из чего-то заведомо верного, выводить то, что нам нужно. Обычно это очень сложно. Путь второй: исходя из того, что нам нужно, попытаться получить что-нибудь верное, а затем убедиться, что возможно вернуться к исходному утверждению (по существу, это вариация первого пути, в которой облегчён поиск пути). Путь третий — доказательство от противного (предположим, что это неверно, и получим противоречие) — об этом разговор особый в специальной главе.

А пока ясно, что мы явно пошли по второму пути. Можно ли вернуться к исходному утверждению? Мы редко задаём себе такие вопросы, потому что обычно пользуемся обратимыми, равносильными преобразованиями. Зато это — одна из наиболее распространённых причин абитуриентских ошибок. Вот типичная ошибка: $\sqrt{x} < -1 \Rightarrow x < 1$, тогда как на самом деле решений нет вообще (корень не может быть меньше отрицательного числа). Причина ошибки — необратимость перехода при возведении в квадрат. В нашем случае неочевиден переход от равенства $\sin y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$ к равенству $y = \frac{\pi}{2} - z$. Осуществим его. Если синусы равны, то углы могут и отличаться. Но тогда ясно — здесь и сработают вторые условия:

$$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - z \leq \frac{\pi}{2},$$

так что углы тоже должны равняться.

Решение, которое приведено, несомненно, не самое короткое, но одно из самых естественных с точки зрения удобства понимания.

Итак, $\arcsin x$, $\arccos y$, $\operatorname{arctg} x$. Чтобы не иметь с ними трудностей — лучше сразу их обозначить.

2. Искусство обозначать, или принцип «бьяки»

Полезное закрепительное УПРАЖНЕНИЕ. Доказать, что

$$\arcsin x = \arccos \sqrt{1 - x^2} \text{ при } x \geq 0;$$

$$2 \arcsin x = \arccos(1 - 2x^2) \text{ при } x \geq 0;$$

$$\arcsin x + \arcsin y = \arccos(\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2} - xy)$$

при $x \geq 0, y \geq 0$.

Какие обычные тригонометрические формулы скрыты под этими «масками»? Придумайте сами несколько подобных тождеств.

Раз уж речь зашла о тригонометрии, то нельзя не сказать несколько слов о методе дополнительного угла — одного из мощнейших средств решения простейших тригонометрических уравнений. Идея метода состоит в свёртке выражения вида $a \sin x + b \cos x$ в одну функцию с помощью введения дополнительного угла, который находят по ходу вычислений. Делают это так. Сначала за скобки выносят $\sqrt{a^2 + b^2}$ (зачем — прояснится позже, выносить надо не думая). Чтобы всё было честно, внутри скобок мы обязаны на это же выражение разделить. Тогда получим

$$\sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right).$$

Теперь вводим обозначения $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi$; $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi$.

Рассматривая эти уравнения как систему, мы можем найти одно её решение (много нам не надо), обычно — $\varphi = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ или $\varphi = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, так что дополнительный угол φ мы уже знаем. А теперь, зачем он нужен? После подстановки наше выражение имеет вид

$$\sqrt{a^2 + b^2} (\cos \varphi \sin x + \sin \varphi \cos x),$$

2. Искусство обозначать, или принцип «бьяки»

а с помощью формулы синуса суммы получаем окончательную свёртку: выражение свернулось в $\sqrt{a^2 + b^2} \sin(\varphi + x)$, чего мы и добивались. Вначале — конкретный пример.

♣ ЗАДАЧА. Решить уравнение

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1.$$

Мы намеренно выбрали самое заурядное уравнение, потому что к задачам такого типа то и дело сводятся сложные. Потому решать их следует автоматически:

$$\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2 \Rightarrow \sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x \right).$$

Имеем два уравнения: $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \varphi$; $\frac{1}{2} = \sin \varphi$. Понятно, что в качестве φ можно взять $\arcsin \frac{1}{2}$, т. е. $\frac{\pi}{6}$. Тогда

$$2 \left(\cos \frac{\pi}{6} \sin x + \sin \frac{\pi}{6} \cos x \right) = 1; \quad 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 1;$$

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}; \quad x + \frac{\pi}{6} = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n;$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n.$$

Ответ получен быстро и чётко.

Метод дополнительного угла научит совершенно автоматически сворачивать часто встречающиеся выражения типа $\sin x \pm \cos x$, $\sin x \pm \sqrt{3} \cos x$ (а как они свернутся?).

Теперь можно ответить, зачем понадобился фокус с корнем квадратным. Причина очень проста — мы не можем что попало обозначать синусом и косинусом хотя бы потому, что каждый из них по абсолютной величине не превосходит единицы. А указанная нормировка не только гарантирует это, но и обеспечивает также основное тригонометрическое тождество: $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$.

Приведём один олимпиадный пример.

♣ ЗАДАЧА. Доказать неравенство при $a, b, c > 0$:

$$a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos(\alpha + \beta) \geq -\frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{2abc}.$$

2. Искусство обозначать, или принцип «бяки»

Поиск решения. Прежде всего для обозримости избавимся от косинуса суммы:

$$a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \alpha \cos \beta - c \sin \alpha \sin \beta.$$

Стало ли лучше? Не похоже. Попробуем вынести что-нибудь за скобки. Получится

$$\cos \alpha [a + c \cos \beta] - \sin \alpha [c \sin \beta] + b \cos \beta.$$

Спрашивается, что с этим можно сделать? Не видно. Плохо, что зависимость именно от двух переменных α и β . Вот если бы была только одна, то можно было бы и производную позвать на помощь. Вот, например, хорошо бы избавиться от α . А за счёт чего? Найти минимум выражения. Но что-то знакомое в такой постановке есть: искали же мы максимумы тригонометрических выражений типа $2 \sin x + 3 \cos x$, и получался при этом $\sqrt{13}$. А как это делалось? Ну конечно же, методом дополнительного угла! А разве здесь можно? Здесь же функции, а не числа. А, собственно говоря, почему нельзя? Возьмём и попробуем. Что за корень мы должны вынести за скобки?

$$\sqrt{(a + c \cos \beta)^2 + (c \sin \beta)^2} = \sqrt{a^2 + c^2 + 2ac \cos \beta}.$$

Хорошо, а то, что останется в скобках, свернётся в синус:

$$\sqrt{a^2 + c^2 + 2ac \cos \beta} \sin(\alpha + \varphi) + b \cos \beta.$$

Что такое φ , нам даже сейчас неинтересно, главное, что такой угол существует, а что он на самом деле, неважно. Так как $\sin(\alpha + \varphi) \geq -1$, то остаётся доказывать неравенство уже для выражения $-\sqrt{a^2 + c^2 + 2ac \cos \beta} + b \cos \beta$. Стала ли задача легче? На вид, конечно, нет — потерялась симметрия. Но по существу — да. Ведь остался только один параметр, значит, задача уже техническая. Её, например, можно сделать с помощью производной, но нам пока не хочется. А что, если применить принцип бяки? Самое время. Что обозначим?

2. Искусство обозначать, или принцип «бьяки»

Конечно же, весь корень! Итак,

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + c^2 + 2ac \cos \beta} &= x; \\ a^2 + c^2 + 2ac \cos \beta &= x^2; \\ \cos \beta &= \frac{x^2 - a^2 - c^2}{2ac}.\end{aligned}$$

Значит, нас интересует минимум выражения

$$-x + \frac{b}{2ac}(x^2 - a^2 - c^2) = \frac{b}{2ac} \left(x^2 - \frac{2ac}{b}x - a^2 - c^2 \right).$$

Но ведь это — квадратный трёхчлен! Его минимум можно найти любым стандартным школьным способом (например, производной), но мы предпочтём элегантный фокуснический метод выделения полного квадрата:

$$\begin{aligned}\frac{b}{2ac} \left[x^2 - \frac{2ac}{b}x + \frac{a^2c^2}{b^2} - \frac{a^2c^2}{b^2} - a^2 - c^2 \right] &= \\ &= \frac{b}{2ac} \left[\left(x - \frac{ac}{b} \right)^2 - \frac{a^2c^2 + a^2b^2 + c^2b^2}{b^2} \right] \geq \\ &\geq \frac{b}{2ac} \left(-\frac{a^2c^2 + a^2b^2 + c^2b^2}{b^2} \right) = -\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{2abc}.\end{aligned}$$

Решение нуждается в совсем небольшой чистке. В качестве комментария хотелось бы отметить, что пренебрегли мы параметром α по точной границе: равенство $\sin(\alpha + \varphi) = -1$ вполне было возможно, так что улучшить оценку было бы нельзя. А вот всегда ли квадрат, которым мы пренебрегли, может обратиться в нуль — об этом предлагается поразмышлять читателю.

Эту несколько подзатынувшую главу уже пора заканчивать, хотя принцип бьяки ещё неоднократно появится на наших страницах. Но чтобы заронить в читателе ещё одну каплю сомнения насчёт того, всё ли он понимает в обозначениях, процитируем замечательный отрывок из книги Дж. Б. Россера «Логика для математиков»:

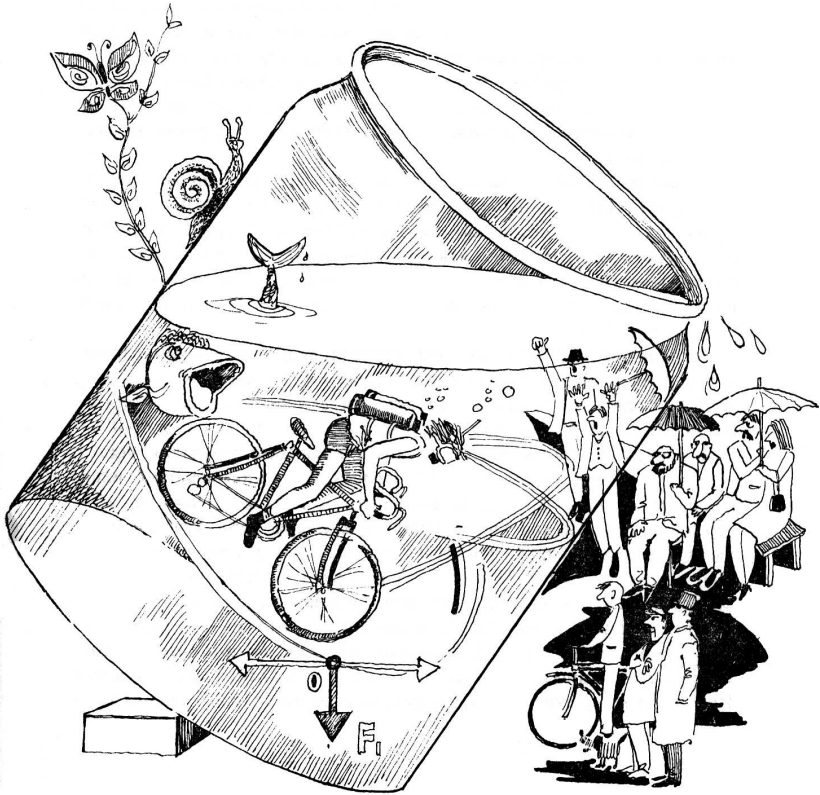
«...если у нас утверждение типа «3 больше 9/12» о рациональном числе 9/12, содержащее некоторое имя «9/12»

2. Искусство обозначать, или принцип «бяки»

этого рационального числа, то мы можем заменить это имя любым другим именем того же рационального числа, например, « $3/4$ ». Когда же мы рассматриваем утверждение типа «3 делит знаменатель $9/12$ » о некотором имени некоторого рационального числа, и наше утверждение содержит некоторое имя этого имени, то это имя можно заменить другим именем того ж имени, но, вообще говоря, нельзя заменить именем другого имени, хотя бы это другое имя было именем того же рационального числа».



УМЕНИЕ СДЕЛАТЬ ВИД



3. Умение сделать вид

...способность к галлюцинациям составляет его преимущество перед теми, кто ею не обладает; ибо он видел многое, чего другие не видят...

Р. Музиль. Человек без свойств

Об этом техническом приёме мало кто подозревает, но пользуются им все уже начиная со школы. Состоит он в следующем: чтобы решить задачу, надо прежде всего сделать вид, что она уже решена. Именно так мы решаем задачи типа «Определить скорость велосипедиста в стоячей воде, если...». Что же именно мы делаем? По давно усвоенной привычке пишем: «Пусть x — скорость велосипедиста. Тогда...»

А теперь, отбросив на время всё, чему нас так хорошо научили, спросим себя: а что, собственно, мы делаем? Берём какую-то букву x , которую непонятно за что называем скоростью, составляем какое-то уравнение, как-то манипулируем им и внезапно объявляем: скорость велосипедиста такая-то. А, собственно, на основании чего? И чем мы вообще занимались? И кто он такой, этот мистер Икс?

А произошло следующее: мы сделали вид, что решили задачу, договорились, будто бы x — это скорость. Для чего? А для того, чтобы лучше узнать, какими свойствами должна обладать эта скорость. Ведь что-то про неё уже известно. Например, что это — число, причём не просто число, а удовлетворяющее условиям задачи. А раз это число, то с ним можно делать всяческие числовые манипуляции: переносить, делить, возводить в квадрат. Поэтому x — это только маска для числа. Она нужна для того, чтобы удобно было следить за правильностью операций. Что нам даёт x ? Некую определённую. Наш x — уже почти существующий объект, во всяком случае, он обладает некоторыми свойствами. Если было бы не страшно запутаться, то можно было бы так и сказать: x — это набор свойств искомой величины скорости, по которым он должен восстанавливаться. Более того, самая главная заслуга мистера Икс — это то, что он показывает, чем искомая скорость быть

3. Умение сделать вид

не может. Другими словами, когда в процессе решения мы установили, что $x = 2$, то это означает, что скорость не может равняться ничему другому, кроме двух. Реально требуется ещё и проверка, а может ли он равняться двум (должен — это ещё не значит, что может).

Основное удобство — единообразие метода и разработанный формализм. Мы не знаем, как решать в общем виде задачи про скорости, но знаем, как решать в общем виде квадратные уравнения; значит, вместо обучения частному искусству решения задач про скорости нам надо овладеть гораздо более простой частной задачей сведения задачи про скорости к задачам про уравнения, для которых у нас есть довольно общая теория и методика.

Чтобы не говорить только об уравнениях, приведём следующую задачу.

♣ **Задача.** Что больше $-1 - \sqrt[3]{3}$ или $1 - \sqrt{2}$?

Поиск решения. В задачах такого типа всегда удобен стандартный приём: сделать вид, будто бы мы уже знаем знак неравенства, поставив вместо него вопросительный знак, и оперировать с неравенством как с обычным, пока знак не проявится. При этом смена знака неравенства, как и в обычном случае, должна сопровождаться переворачиванием, что становится ясно из дальнейшего:

$$1 - \sqrt[3]{3} ? 1 - \sqrt{2}; \quad -\sqrt[3]{3} ? -\sqrt{2}; \\ \sqrt[3]{3} \text{ } \text{;} \sqrt{2}; \quad (\sqrt[3]{3})^6 \text{ } \text{;} (\sqrt{2})^6; \quad 3^2 \text{ } \text{;} 2^3.$$

Мы получили очевидное неравенство $9 > 8$. Значит, знак $\text{ } \text{;}$ заменяется на $>$, а знак $?$ на $<$. Таким образом, это и есть ответ в нашей задаче.

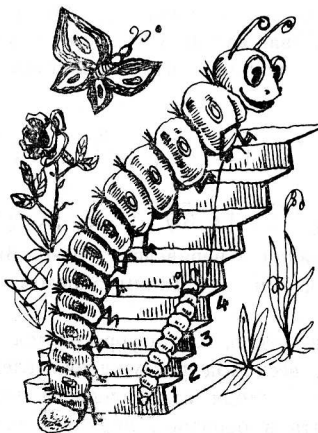
Комментарий. Интересно, как оформляются решения таких задач. Строго говоря, весь ход рассуждений следует проводить задом наперёд, т. е. исходя из последнего верного и очевидного неравенства построить в обратном порядке всю цепочку, пока не получим требуемое неравенство. Вне всякого сомнения, когда увидишь подобное решение, искус-

3. Умение сделать вид

ство создавать такие доказательства кажется недостижимым. Но как только мы заглянули за кулисы — всё прояснилось. Единственное, за чем следует особенно следить, — это чтобы в обратном порядке цепочку провести было возможно.

А теперь поговорим об одном из самых важных приёмов по части умения делать вид. Речь пойдёт о методе математической индукции. Приём этот простой и стандартный, хотя и требует некоторого навыка работы с ним. Тем не менее, он встречается настолько часто, а усваивается настолько плохо, что заслуживает гораздо более тщательного объяснения, чем это обычно принято в учебниках. Рассмотрим отдельно суть метода и его техническое исполнение.

Идею метода очень легко можно объяснить на примере лестницы. Предположим, вы хотите научить ребёнка ходить по ней. Вы должны научить его всего двум вещам: как сделать первый шаг и как переступить со ступеньки на ступеньку. Как только это усвоено — ребёнок способен подняться на любую высоту. Другое дело, что нужно ещё научить его спускаться самостоятельно, но это к методу индукции уже отношения не



Индукционная лестница

3. Умение сделать вид

имеет. (Хотя чуть ниже мы покажем и как спускаться с индукционной лестницы.)

Точно такая же схема действий применяется для доказательств утверждений по индукции. Ступеньками здесь служат натуральные числа. Первый шаг — подъём на единицу — называется базой индукции, переход со ступеньки на ступеньку, то бишь с натурального числа на натуральное, — индукционным переходом.

А теперь как это делается на практике. Прежде всего о признаках задачи, для которой может оказаться полезной индукция. Признак этот довольно простой: в формулировке присутствует какое-то натуральное число — обычно n или k . Стандартное начало: «Доказать, что для любого натурального k ...». Иногда k может отсутствовать, но фигурирует какое-нибудь большое число, скажем, 1986. Это — верный признак того, что можно попробовать доказать утверждение для произвольного k , и индукция здесь часто хороший помощник. Наконец, последнее: доказательство по индукции проходит «бесплатно». Если оказывается, что задачу можно решить и без индукции, то за то, что вы стали вести доказательство по индукции, «платить» не придётся — доказательство всё равно пройдёт.

Теперь о порядке действий. Прежде всего — чёткая формулировка. Она должна зависеть от одного натурального параметра, скажем, k . Далее чётко формулируется утверждение для $k = 1$ и (чаще всего — запросто) доказывается. Этим выполняется первый этап — база индукции. Наконец, основной этап — индукционный переход. Суть его очень проста: считайте, что вы решаете ту же самую задачу, но за то, что вы когда-то доказали утверждение для $k = 1$, вам теперь облегчают задачу, добавляя одно сильное условие. Вот как это выглядело бы на числовых примерах. Вместо «Докажите для 1985 жирафов» вам предлагают доказать облегчённую задачу: «Пользуясь тем, что для 1984 жирафов уже доказано, докажите для 1985 жирафов». Ясно, что хотя вторая формулировка и длиннее, но зато есть шанс с ней проще справиться за счёт умелого сведения

3. Умение сделать вид

случая 1985 жирафов к случаю 1984. Быть может, такое сведение и не получится, но в любом случае попробовать свести надо: это может оказаться проще, чем просто решать исходную задачу.

При работе с произвольным k применяется следующий формализм. Формулируется утверждение задачи при $k - 1$, взятом вместо k . (См., кстати, главу об обозначениях, где напоминается, как подставлять в формулу. Как ни странно, именно этот момент часто вызывает трудности в овладении методом индукции.) А затем эту новую формулировку берут в качестве дополнительного условия задачи: делается вид, что это — уже верное утверждение, доказательство которого мы знаем. Далее можно поступать двояко. Путь первый — спокойно решать задачу, не обращаясь к этому дополнительному условию или используя его только в редких случаях. Путь второй: сконцентрировать свои усилия на поиске сведения всего доказательства к этому дополнительному условию, надеясь, что бóльшая часть доказательства в нём уже заложена (когда это действительно так, сведение обычно даётся без труда). Продемонстрируем сказанное на очень простом примере.

❖ **Задача.** Доказать, что сумма последовательных нечётных чисел, начиная с 1, — точный квадрат.

Поиск решения. Для индукционного доказательства задача ещё, конечно же, не готова: отсутствует натуральный параметр k . Попробуем несколько улучшить формулировку. Как записать сумму последовательных чисел, точнее — нечётных чисел. Как записать нечётное число вообще? В общем виде это понятно: $2k + 1$ или $2k - 1$. Выберем, например, последнюю форму. Тогда задача будет звучать так: «Доказать, что сумма $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1)$ является точным квадратом». Эта формулировка уже значительно лучше, однако если мы возьмёмся за её доказательство вот в таком виде, то успех нас ждёт не скорый. Причина — в неопределённости формулировки «точный квадрат». Чтобы индукционное рассуждение проходило плавно, ему нужна определённость. Поэтому нач-

3. Умение сделать вид

нём... угадывать точную формулу этого квадрата. Да, именно угадывать, и в индукционных задачах это применяется сплошь и рядом: сначала угадывают точную формулу, пользуясь при этом малыми значениями k , а уже затем доказывают. Угадать несложно: $1 = 1^2$, $1 + 3 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 3^2$. Несложное сравнение с формулой показывает, что ожидаемый квадрат — это k^2 .

Итак, новая формулировка: «Доказать, что $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$. Это мы будем уже доказывать по индукции. Вначале — лёгкий шаг по доказательству базы индукции. Формулируем: $1 = 1^2$. А куда делись тройки и пятёрки? А их и не должно быть. Просто мы несколько злоупотребляли нашей записью в виде $1 + 3 + \dots$, не особенно заботясь о том, что последний член должен быть всё-таки больше всех предыдущих. Для больших k это было бы не страшно, но зато облегчало понимание. А для маленьких k наступила расплата за нашу беззаботность: если бы мы продолжали писать в прежнем духе, то получилось бы $1 + 3 + \dots + 1$, что, конечно же, явная бессмыслица — должен быть написан только один член. Это — сознательная неточность, нередко культивируемая в математике ради ясности или удобства. Типичный пример другой такой неточности — выражение «функция x^2 ». Никакая это не функция — это значение функции в точке x . А функция — это $(\quad)^2$. Но представляете, как было бы неудобно иметь дело с такими функциями. Точно так же и здесь имеет место заведомая неточность. Но если бы мы писали просто $1 + \dots + 2k - 1$, насколько туманнее был бы для нас закон последовательности. И последнее, что же всё-таки с этой неточностью делать? А вот что: определять всё по последнему члену. При $k = 1$ в нашем случае последний член равен 1, значит, и оканчиваться наша сумма обязана единицей.

Теперь, когда база индукции уже доказана (а доказать равенство $1 = 1^2$ несложно), мы можем приступить к индукционному переходу. Прежде всего формулируем утверждение для $k - 1$:

$$1 + 3 + 5 + \dots + [2(k - 1) - 1] = (k - 1)^2.$$

3. Умение сделать вид

Теперь мы должны решить задачу, сделав вид, что только что выписанное равенство уже нами доказано. Прежде всего раскроем внутренние скобки в дополнительном индукционном предположении:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 3) = (k^2 - 2k + 1).$$

Сравнив с тем, что нам надо доказать, мы найдём много общего, а именно, что все члены, кроме последнего, входят в выписанную формулу. Перепишем это, чтобы стало лучше видно:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 3) + (2k - 1) = k^2.$$

Сейчас хорошо видно, как доказывать это равенство: надо просто подставить в его левую часть предыдущее. В результате получим, что в доказательстве нуждается гораздо более простая формула:

$$(k^2 - 2k + 1) + (2k - 1) = k^2.$$

Раскрыв скобки, мы получим желаемое.

Чтобы у читателя не создалось впечатления, что его одурачили (естественный вопрос: а когда же мы всё-таки доказали основное утверждение про сумму? Не потому ли оно доказалось, что мы попросту предположили его по существу уже доказанным?), вернёмся к нашей аналогии с лестницей и посмотрим, что же всё-таки произошло. В каком случае было излишне делать вид? Заведомо, при $k = 2$. Тогда наше доказательство совершенно справедливо и честно. Предположение при $k = 1$ мы действительно доказали, и оно настоящее. Значит, указанное доказательство для $k = 2$ совершенно справедливо (можно подставить $k = 2$ в доказательство и прочитать его — попробуй, читатель!). Но тогда мы можем им, как доказанным, пользоваться для доказательства утверждения при $k = 3$. Вспомогательное утверждение при $k = 2$ уже верно и так далее — вверх по лестнице. Другими словами, мы заменили бесконечное множество однотипных доказательств всего одним (бессмысленно отдельно учить ребёнка, как взбираться

3. Умение сделать вид

на пятую ступеньку, и отдельно — как на седьмую, разумнее научить его переступить со ступеньки на ступеньку).

Последняя трудность. Она на уровне обозначений. Дело в том, что очень часто индукционный шаг совершают не от $k - 1$ к k , а от k к $k + 1$. При этом поступают так. То, что сформулировано в задаче, считают уже доказанным, а доказывают утверждение задачи при $k + 1$, взятом вместо k (примеры вы найдёте в других главах). Для начинающего это особенно неприятная трудность психологического характера: зачем решать задачу после того, как мы уже предположили, что она решена? Хочется думать, что читатель уже сможет ответить на этот почти риторический вопрос. А для закрепления — задача.

♣ Задача. Доказать, что сумма кубов последовательных чисел, начиная с 1, — точный квадрат.

Займёмся теперь геометрическими мотивами в искусстве делать вид.

♣ Задача. В тетраэдре суммы противоположных рёбер равны. Доказать, что окружности, вписанные в грани тетраэдра, попарно касаются (рис. 5).

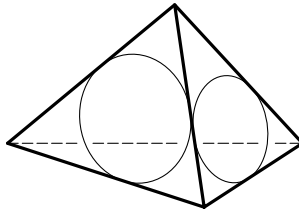


Рис. 5. Касание окружностей из разных граней

Поиск решения. «В одну телегу впрячь не можно коня и трепетную лань». Как же нам совместить два столь, казалось бы, несовместимых условия? Одно условие довольно-таки просто, зато второе, насчёт окружностей, незнакомо. С него и надо начинать. Попробуем его расшифровать и перевести как-то иначе. Что значит, что окружности касаются? Раз они лежат в разных гранях, это возможно только в одном случае,

3. Умение сделать вид

когда точка касания — это точка касания рёбер окружностями. Другими словами, требуется, чтобы расстояние от вершины до точки касания было одинаковым для каждой окружности. Если так, то мы должны задать себе новый вопрос: а чему равно это расстояние? Задача стала чисто планиметрической. Дан треугольник, в который вписана окружность (см. рис. 6). Тре-

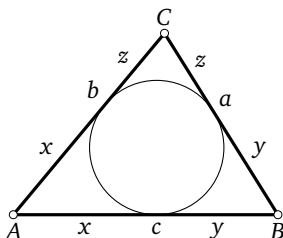


Рис. 6. Касательные и их отрезки

буется найти расстояния от вершин до точек касания, если известны... скажем, рёбра. Сделаем вид, что мы знаем длины рёбер, и попытаемся найти нужные расстояния. Как будем искать? Можно, конечно, применить «суровую» тригонометрию, отыскав все углы, радиус вписанной окружности и затем уже нужные отрезки. Путь не из лёгких, хотя и надёжный. А нельзя ли попроще? Какие свойства есть у наших отрезков? Прежде всего, они — касательные. Что мы знаем про касательные к данной окружности? Что они, проведённые из одной точки, равны между собой. Это хорошее свойство. И даже понятно, как его здесь применить. Обозначим все отрезки буквами. Их шесть штук — три пары равных. Обозначим разные отрезки x , y , z . А теперь... сделаем вид, что мы их знаем, а наши стороны — a , b , c — нет. Вычислим стороны через отрезки. Имеем

$$x + y = c, \quad x + z = b, \quad y + z = a.$$

Отсюда уже легко получаются нужные решения. Самый изящный способ такой: сложив все уравнения и обозначив, как

3. Умение сделать вид

обычно, через p полупериметр, получим

$$x + y + z = p.$$

Вычитая из этого уравнения предыдущие, находим

$$z = p - c, \quad y = p - b, \quad x = p - a.$$

Это и есть формулы для вычисления расстояния от вершин до точек касания. Запоминаются они довольно легко: именно такие выражения входят в формулу Герона для площади треугольника. Такая связь, кстати сказать, — источник новых задач.

Теперь мы в состоянии взяться за задачу про тетраэдр (рис. 7). Рассмотрим картинку. Сторон мы не знаем, но сдела-

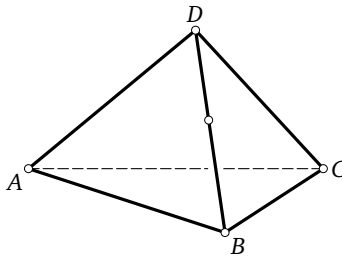


Рис. 7. И снова тетраэдр

ем вид, что знаем. Пусть $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Сумму противоположных сторон, которая одинакова и которую мы тоже не знаем, обозначим через x . Тогда $AD = x - a$, $BD = x - b$, $CD = x - c$.

В треугольнике ABC расстояние от вершины A до точки касания по ребру AB равняется, согласно проделанным выше вычислениям, $p - a$, т. е. $\frac{b+c-a}{2}$. Если же рассмотреть треугольник ABD , то точно такие же вычисления дадут, что расстояние от вершины A до точки касания этой второй окружности равно $\frac{AD+AB-BD}{2}$, т. е. $\frac{(x-a)+c-(x-b)}{2}$. Раскрывая скобки, получаем, что эти два, вообще говоря, разных рас-

3. Умение сделать вид

стояния совпадают. А это именно то, что нам требовалось: окружности касаются в одной точке.

Отметим, что нам понадобилось вводить все три отрезка, чтобы вычислить их длину. Так бывает нередко: чтобы решить задачу, надо решить полную задачу.

Понятно, в чём состояло искусство делать вид. Мы вычисляли что-то, хотя нам ничего не было задано. Тем не менее, мы сделали вид, что кое-что знаем. В результате мы, конечно же, ничего и не вычислили, но зато установили связи между разными понятиями. А именно это нам и требовалось.

Поразительно, но этот простой приём с трудом усваивается школьниками в геометрических задачах, прежде всего — в стереометрических. Возможно, дело в конкретности геометрических понятий, но большинство школьников в геометрии способны манипулировать только конкретными числами либо, напротив, ограничиваться одними доказательствами. А мощным алгебраическим методам места не находится. В то же время они помогают получать результат в половине случаев, хотя не всегда так изящно, как в красивых геометрических доказательствах с дополнительными построениями, поворотами и прочими удивительными преобразованиями.

Обсудим это подробнее. Алгебраический подход предполагает известное планирование, и в этом его сила. Поясним сказанное. Прямоугольный треугольник задаётся двумя параметрами, например, двумя катетами, катетом и площадью, высотой и одним из углов, и так далее. Поэтому первый шаг в овладении методом — обучение искусству находить по любым двум элементам другие. Требуется перерешать десятка три-четыре задач такого типа. После этого мы можем смотреть на любую задачу, в которой встретился прямоугольный треугольник, так: знаем ли мы про него какие-нибудь два параметра? Если да, то мы немедленно делаем вид, что знаем всё про этот треугольник. Происходит это во время планирования решения задачи. Например, мы решаем задачу про равнобедренный треугольник. Тут же проводим высоту. Получаем два

3. Умение сделать вид

прямоугольных треугольника. Первое, на что мы смотрим, не сводятся ли условия нашей задачи к каким-то двум условиям про прямоугольный треугольник. Если да, то мы уже знаем, что задачу решим. План решения такой: свести дело к прямоугольному треугольнику, получить два параметра, по ним вычислить всё что нужно в прямоугольном треугольнике, а затем уже и в равнобедренном.

Тем самым задачи про равнобедренный треугольник — это чаще всего задачи про прямоугольный треугольник. Произвольный треугольник требует трёх параметров. Очень важная тренировка (порядка сотни разнообразных задач) — находить по любым трём параметрам другие. Точнее, достаточно научиться по ним вычислять три стороны (это первый цикл задач) и по трём сторонам вычислять какие-то другие параметры (это второй цикл задач). На самом деле некоторые из этих задач неразрешимы, но в учебниках таких обычно не бывает.

Итак, предположим, что и этим искусством читатель овладел. Тогда уже можно объяснить суть алгебраического подхода к решению задач по геометрии. Прежде всего читаем условия задачи и пытаемся представить себе, насколько жёсткой она является. Это означает, что мы чисто интуитивно пытаемся оценить, однозначно ли задаётся задача нашими условиями, или объектов, описанных условиями, может быть несколько. Если задание нежестко, то добавляем себе новые параметры: обозначаем неизвестными какие-то наиболее удобные для нас элементы. Вводим их столько, сколько нужно для жёсткости.

Дальше — самый важный этап. Некоторые из данных могут быть неудобными в качестве параметров, т. е. обычно сами эти данные вы легко вычисляете (скажем, площадь описанного круга), но что-то выразить через них вам непривычно и неудобно. Вот тут-то должно проявиться основное искусство: вы должны вместо этих, неудобных для вас, параметров ввести новые, через которые вы, как вам кажется, сможете вычислить если не всё, то, по крайней мере, гораздо больше.

3. Умение сделать вид

Вводите их как неизвестные, а те, известные, через них вычисляете (похожая ситуация описана в главе об искусстве перевода). Вот здесь начинается технический этап. Легко сказать — вычисляете, но непросто это сделать. Тут и нужен плановый подход. По тем параметрам, которые вы считаете для себя как бы известными (в них могут входить и на самом деле известные), вы прикидываете, что вы можете узнать: треугольник за треугольником. Где-то так: «У этого прямоугольного треугольника я знаю два параметра, значит, узнаю высоту. Эта высота входит в состав того треугольника как медиана. Там, кроме этой медианы, я знаю две другие, значит, знаю всё. Так, тогда я знаю этот угол, а с его помощью и вот этой стороны узнаю площадь другого прямоугольного треугольника — она мне задана с самого начала: значит, получил уравнение».

Вот это и есть основная цель — получение уравнений. Когда вы получите столько уравнений, сколько было неизвестных параметров, вы решите систему, найдёте параметры и... прочитаете, что же спрашивается в задаче. Поскольку параметры вы выбрали себе сами, и удобные, значит, то, что спрашивается, вы вполне вычислите. А если требуется что-то доказать, то проблем тоже не должно возникать: надо только подставить вычисленные связи в требуемое утверждение, и всё лишнее должно сократиться. Именно так мы поступили в предыдущей задаче. Но к делу. Возьмём первый попавшийся под руку пример из любого пособия для поступающих.

✦ **Задача.** В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) медиана AD перпендикулярна биссектрисе CE . Определить величину угла ACB .

Поиск решения. Прежде всего рисуем чертёж (рис. 8). Полезный совет: в чертежах надо начинать с наиболее трудных условий. Скажем, в этой задаче надо начинать не с треугольника, а с двух перпендикулярных линий. А потом уже попытаться подогнать треугольник под требуемые условия, т. е. чтобы одна из линий оказалась биссектрисой, а вторая — медианой.

3. Умение сделать вид

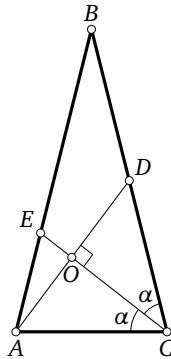


Рис. 8. Медиана и биссектриса перпендикулярны

Итак, чертёж построен. Определяем степень жёсткости. Задано всего одно условие — перпендикулярность. Значит, задача задана нежестко. И это понятно: спрашивается только значение угла, т. е. треугольник можно заменить на подобный. Вообще говоря, равнобедренный треугольник требует двух параметров. Их мы и введём: угол α , равный углам AOC и COD , и отрезок CD , который мы обозначим через x . Теперь подумаем, как нам использовать то, что дано, — перпендикулярность. Просто вычислять угол между медианой и биссектрисой неприятно (хотя в принципе возможно). Гораздо удобнее поступать по аналогии с построением чертежа: не получать уравнение, что угол между ними равен 90° , а получить уравнение, пользуясь другой точкой зрения: прямая, проведённая перпендикулярно биссектрисе CE , является медианой.

Теперь строим план. В треугольнике COD мы знаем два параметра, значит, знаем всё. В частности, знаем OC . Тогда знаем весь треугольник AOC , в частности сторону AC . (Можно было бы это заметить и проще, увидев, что треугольник ACD — равнобедренный. Но мы сделаем вид, что всякая геометрическая интуиция нам чужда — это должно само собой получиться из алгебры с тригонометрией.) Итак, знаем AC , значит — зна-

3. Умение сделать вид

ем треугольник ABC , благо угол ACD , равный 2α , мы знаем, а для равнобедренного треугольника требуется только два параметра. А тогда знаем BC и можем записать условие того, что AD медиана: BC должно быть вдвое больше, чем CD . Это и будет требуемым уравнением.

Реализуем этот план. Итак, CD — это x и гипотенуза треугольника COD . Катет этого треугольника вычисляется по формуле $OC = x \cos \alpha$. В треугольнике AOC , наоборот, OC является катетом, и исходя из него можно вычислить гипотенузу: $AC = \frac{OC}{\cos \alpha}$, или $AC = \frac{x \cos \alpha}{\cos \alpha} = x$ — обещанное доказательство равнобедренности получилось. Теперь, как вычислить BC ?

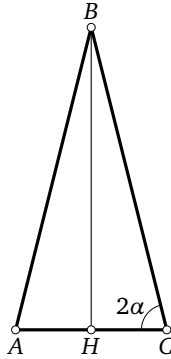


Рис. 9. Равнобедренный треугольник — это два прямоугольных треугольника

Сделаем отдельный чертёж (рис. 9). Золотое правило в геометрических задачах:

ОПУСТИ ВЫСОТУ!

Здесь оно работает автоматически, так как мы помним, что надо сводить равнобедренный треугольник к прямоугольному. Имеем: CH — половина AC , т. е. $x/2$. Треугольник CHB прямоугольный. В нём мы знаем катет CH и угол 2α . Легко находим гипотенузу: $BC = \frac{CH}{\cos 2\alpha}$, или $BC = \frac{x}{2 \cos 2\alpha}$. Осталось

3. Умение сделать вид

записать условие того, что AD — медиана, т. е. D — середина отрезка, или $BC = 2CD$. Распишем полученное уравнение:

$$\frac{x}{2 \cos 2\alpha} = 2x, \quad \cos 2\alpha = \frac{1}{4}.$$

Как и следовало ожидать, x сократился. Остальное уже интереса не представляет. Приведём ещё один стереометрический пример.

✦ **ЗАДАЧА.** Плоские углы при вершине пирамиды прямые, S_0 — площадь основания, S_1, S_2, S_3 — площади боковых граней. Доказать, что $S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$.

Поиск решения. В первую очередь — чертёж (рис. 10). Задано только три параметра — углы. Ясно, что до жёсткости ещё далековато. Какие выберем параметры, чтобы задача стала жёсткой и удобной? Явно напрашиваются рёбра AD, BD, CD . Обозначим их x, y, z . Когда они заданы, конструкция полностью определена.

Теперь составляем план действий. Все боковые треугольники — прямоугольные, т. е. для каждого из них нужно по два параметра, и они у нас есть. Значит, про них мы всё знаем. Далее, благодаря этому мы знаем три нижних ребра. Следовательно, нам всё известно про нижний треугольник. Теперь читаем, что там спрашивается в задаче? Ах, про площади... Тогда сразу приступаем к реализации плана.

По теореме Пифагора находим три нижних ребра:

$$AB = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad BC = \sqrt{y^2 + z^2}; \quad CA = \sqrt{z^2 + x^2};$$

по формуле Герона — площадь нижнего треугольника:

$$S_0 = \sqrt{\frac{AB + BC + CA}{2} \cdot \frac{AB + BC - CA}{2} \cdot \frac{AB + CA - BC}{2} \cdot \frac{BC + CA - AB}{2}}.$$

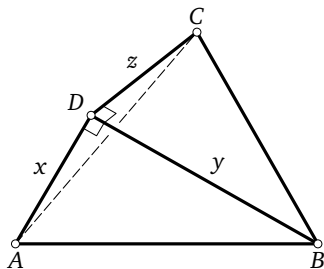


Рис. 10. Когда боковые рёбра перпендикулярны...

3. Умение сделать вид

А формулы для площадей верхних прямоугольных треугольников очевидны:

$$S_1 = \frac{xy}{2}, \quad S_2 = \frac{yz}{2}, \quad S_3 = \frac{xz}{2}.$$

Осталось подставить всё в требуемую формулу и убедиться, что она справедлива:

$$\begin{aligned} 16S^2 &= [(AB + BC)^2 - CA^2][CA^2 - (AB - BC)^2] = \\ &= [2AB \cdot BC + (AB^2 + BC^2 - CA^2)] \times \\ &\times [2AB \cdot BC - (AB^2 + BC^2 - CA^2)] = \\ &= 4(AB \cdot BC)^2 - (AB^2 + BC^2 - CA^2)^2 = \\ &= 4(x^2 + y^2)(y^2 + z^2) - (x^2 + y^2 + y^2 + z^2 - x^2 - z^2)^2 = \\ &= 4(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) = 16(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2). \end{aligned}$$

Комментарии. Конечно же, задачи предложены не самые трудные, но, честное слово, взятые наугад. Более того, часто всё равно требуются дополнительные построения, потому как треугольников не хватает, особенно это нужно в стереометрии. Там стандартный план действий — рассматривать разнообразные «вырезки» из картины — всевозможные сечения. Очень полезно их вырисовывать на отдельных чертежах, а не высматривать всё на одном, стереометрическом, чаще всего и без того не слишком ясном. Ну и, конечно же, не обязательно ограничиваться треугольниками. Нужны также и окружности (один параметр), параллелограммы (сколько параметров?) и так далее. Последний совет — никогда не следует рисовать сферу. Вполне достаточно её центра, соединённого с несколькими нужными точками. Иногда бывают полезны окружности, получающиеся при разных сечениях, но сама сфера только запутает чертёж.

Читатель, конечно, понимает, что описанная метода — отнюдь не панацея от всех бед, а просто хороший инструмент, которым рекомендуется владеть или хотя бы подозревать о его существовании.

3. Умение сделать вид

Расскажем ещё об одном симпатичном приёме решения вопросов, очень часто вызывающих трудности. Трудности эти связаны с необходимостью вычислять, в каком отношении делится тот или иной отрезок, а приём носит название метода центра тяжести. Продемонстрируем его на стандартном примере.

✦ **Задача.** В треугольнике ABC проведены медиана AD и такая прямая BE , которая делит площадь треугольника ABC в отношении $2:1$ (треугольник ABE больший). Пусть O — точка пересечения прямых AD и BE . В каком отношении делит площадь треугольника ABC прямая CO ?

Решение. Прежде всего расправимся с нерадостным условием «делит площадь в отношении $2:1$ ». На самом деле надо считать, что сказано следующее: точка E делит отрезок AC в отношении $2:1$. Почему? Да просто потому, что посчитать площадь можно через произведение основания на высоту, а высота — общая... (Эта очень примитивная мысль эксплуатируется в абитуриентских задачах нещадно. Удивительно, однако, что многим школьникам она совершенно незнакома. Только учитывая это обстоятельство, мы вообще сформулировали задачу на языке площадей.) Точно таким же образом мы выясняем, что спрашивают нас о том, в каком

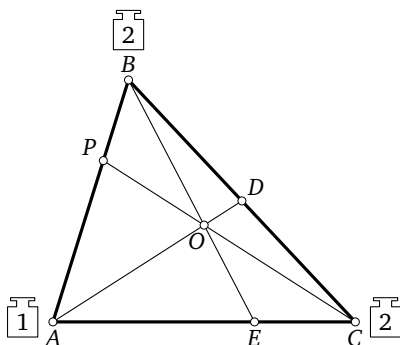


Рис. 11. Метод центров тяжести

3. Умение сделать вид

отношении делит отрезок AB точка P (см. рис. 11). Именно такую задачу мы самым волшебным образом сейчас решим.

Представим себе, что в вершине A стоит гирька весом 1 (скажем, килограмм или пуд), а в каждой из вершин B и C — по гирьке весом 2. Где находится центр тяжести трёх гирек? Две гирьки по 2 можно с успехом заменить одной гирькой весом 4 в точке D — центре тяжести этих двух гирек. Значит, центр тяжести находится на прямой AD . Посмотрим на всё это с другой точки зрения. Центр тяжести двух гирек в вершинах A и C находится как раз в точке E , так как она делит отрезок AC именно в том отношении, в каком относятся веса гирек. Значит, эти две гирьки можно заменить на одну весом 3 в точке E . Вывод — центр тяжести находится также на прямой BE . Но тогда ему некуда деться: он должен находиться на пересечении прямых AD и BE , т. е. в точке O . А теперь раскрутим всё в обратном порядке. Тогда центр тяжести лежит на прямой CP . Значит, точка P делит отрезок AB в таком отношении, в каком относятся веса гирек в точках A и B : $AP : BP = 2 : 1$.

Замечания. Прежде всего отметим, что попутно мы получили возможность выяснить другие, не интересовавшие нас доселе вопросы. Например, мы можем узнать, в каком отношении делит точка O отрезок AD — в отношении $4 : 1$, так как в точке D нам пришлось ставить гирьку весом 4. Точно так же отрезок BE точка O делит в отношении $3 : 2$.

Во-вторых, отметим, что свойствами медианы как таковыми мы не пользовались. Мы использовали только то, в каком отношении делит точка D сторону BC . Понятно, что это отношение могло бы быть другим — ход решения ничуть бы не изменился.

Единственное, чему осталось научиться, — как подбирать гирьки. Это-то как раз очень просто: так, чтобы центр тяжести попал в нужную нам точку, причём одну гирьку можно брать произвольного веса, а остальные сами определяются. Чтобы

3. Умение сделать вид

не ходить далеко за примерами, предположим, что на том же чертеже $AE:EC = 15:7$, а $BD:DC = 9:8$. Числа другие, а чертёж почти тот же. Итак, берём в A любую гирию, скажем, весом 1. Какую гирию надо взять в C ? Это ясно — чтобы отношение её веса к 1 равнялось отношению $AE:EC$. Вывод — в C нужна гирия весом $15/7$. Теперь что поставить в B ? Скажем, x . Что требуется? Требуется, чтобы отношение весов B и C , т. е. x и $15/7$ равнялось отношению длин отрезков DC к BD , т. е. $8:9$. Решая пропорцию $x:15/7 = 8:9$, находим $x = 40/21$. А теперь мы знаем отношение отрезков BP к AP , которое равно $1:x$, т. е. $21:40$. Для закрепления — упражнения.

✦ Задача. Доказать, что медианы в любом треугольнике пересекаются в одной точке и делятся в отношении $2:1$ в точке пересечения.

✦ Задача. Доказать, что в любом тетраэдре отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани, пересекаются в одной точке и делятся в отношении $3:1$ в точке пересечения.

✦ Задача. Из вершин A, B, C треугольника ABC проведены прямые, делящие его площадь в отношении $2:1$. Найти площадь образовавшегося внутри треугольника.

Овладев методом, читатель свободно сможет решать не только такие задачи, но и задачи в стереометрии, где требуется вычислить, в каком отношении находятся какие-нибудь объёмы или отрезки.

И последний штрих — векторы. Как их применять и в каких задачах? Совет — *нежесткие задачи любят векторы*. Например, всё, что перечислено выше в методе центров тяжести, решается также и с помощью векторов. Идея тут такая: вводится необходимое количество векторов, чтобы задача стала жёсткой, и всё через них выражается.

✦ Задача. Середины сторон AB и CD , BC и DE выпуклого пятиугольника соединены отрезками. Середины полученных отрезков снова соединены. Доказать, что последний отрезок параллелен отрезку AE и равен $\frac{1}{4}AE$ (рис. 12).

3. Умение сделать вид

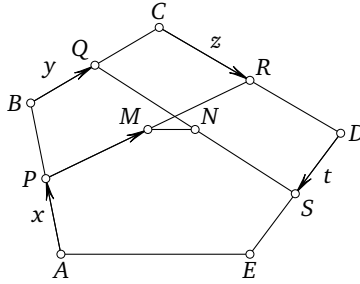


Рис. 12. Векторы в действии

РЕШЕНИЕ. Вводим четыре вектора $x = \overline{AP}$, $y = \overline{BQ}$, $z = \overline{CR}$, $t = \overline{DS}$. Тогда из пятиугольника $ABCDE$ имеем $\overline{AE} = 2x + 2y + 2z + 2t = 2(x + y + z + t)$. Далее, из четырёхугольника $PBCR$ находим $\overline{PR} = x + 2y + z$. Аналогично из другого четырёхугольника $QCDS$: $\overline{QS} = y + 2z + t$. Таким образом, мы знаем векторы $\overline{PM} = \frac{1}{2}$, $\overline{PR} = y + \frac{x+z}{2}$ и $\overline{NS} = \frac{1}{2}\overline{QS} = z + \frac{1}{2}(y + t)$. Теперь из шестиугольника $APMNSE$ легко получаем $\overline{MN} = \overline{AE} - \overline{AP} - \overline{PM} - \overline{NS} - \overline{SE} = \frac{1}{2}(x + y + z + t) = \frac{1}{4}\overline{AE}$, что и требовалось доказать.

На самом деле этот пример — только ничтожная часть могущества векторного метода, но более подробный разговор о векторах занял бы слишком много места и времени. А нам пора переходить к другим главам.



КАК БОРОТЬСЯ С МОДУЛЯМИ,
ИЛИ ИСКУССТВО ПЕРЕБОРА



4. Как бороться с модулями, или искусство перебора

Divide et impera
(Разделяй и властвуй)

Опытный репетитор любит использовать на первом занятии задачи с модулем. Девяносто пять процентов, что новый ученик не будет иметь даже представления о том, как браться за задачи типа

$$|1 - x| + |3 - 2x| = 1 + |x^2 - 3|.$$

Между тем рецепт решения настолько примитивен, что в трёх случаях из четырёх домой ученик придёт не только с умением решать подобные задачи, но и с твёрдым убеждением, что наконец-то он встретил человека, по-настоящему разбирающегося в мудрёной науке математике (в оставшемся одном случае из четырёх опытный репетитор под благовидным предлогом от ученика отказывается). Суть же рецепта одна — перебор. Умение перебирать варианты составляет ещё одну важную профессиональную черту математика. Умение это складывается, во-первых, из готовности решиться на перебор, а во-вторых, способности его сократить. Чтобы проиллюстрировать это, мы поступим как опытный репетитор и начнём с модулей.

Самое главное — это хорошо разобраться с его определением. Интуитивно оно понятно, модуль — это «число без знака» (вопиюще неграмотная фраза, но, как это часто бывает, хорошо передающая суть понятия). Проблема, однако, в том, что это «определение» прекрасно для конкретных чисел ($|-3| = 3$), но совершенно неработоспособно, когда мы имеем дело с неизвестными (чему равен $|1 - x|$?). Поэтому мы должны сознаться: на самом деле мы не знаем, что это такое, — и попытаться придумать новое, более работоспособное определение, а если придумать трудно, то заглянуть в книгу, где можно найти что-нибудь подобное:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

4. Как бороться с модулями, или искусство перебора

На первый взгляд, радости немного: такое короткое обозначение так длинно и непонятно объясняется. Но на то оно и обозначение: короткие вещи нет смысла обозначать! Давайте хотя бы проверим, что для чисел такое определение совпадает с нашим интуитивным. Например, чему равен модуль числа 3? Оно положительно, значит, читаем первую строчку и получаем само 3. Годится! А теперь чему равен модуль числа -3 ? Сейчас -3 исполняет роль x , и оно отрицательно, следовательно, мы должны перейти ко второй строчке и написать $-x$, т. е. $-(-3)$. Но ведь это действительно равно 3, как и должно быть. Надо же!

Трюк этот настолько неочевиден, что мы должны с самого начала усвоить, что случаи, когда x больше либо равен 0 и когда меньше, настолько разнятся друг от друга, что рассматривать их всегда следует по отдельности. Сформулируем в виде рецепта.

Во всех задачах с модулем (скажем, с $|x|$) основной метод состоит в том, что рассматриваются два случая, когда:

1) $x \geq 0$ — тогда во всех местах знак модуля попросту заменяется на скобки;

2) $x < 0$ — тогда во всех местах вместо $|x|$ пишем $(-x)$ (обращаем внимание на скобки!).

Окончив решение в каждом из двух случаев, не забываем проверить, что решения удовлетворяют выбранным условиям ($x \geq 0$ и $x < 0$ соответственно). Всё, что не подходит, отбрасывается. Общий ответ «склеивается» из ответов двух частных случаев.

✦ ПРИМЕР. Доказать, что $|-x| = |x|$.

Трудно поверить, но это — теорема, интуитивно очевидная, но... как её всё-таки доказывать? Только по рецепту!

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $x \geq 0$. Тогда $|x| = x$. С другой стороны, $-x \leq 0$, так что для вычисления модуля мы должны пойти по второй строке определения, откуда $|-x| = -(-x) = x$, и тем самым совпадение доказано.

4. Как бороться с модулями, или искусство перебора

2. Пусть $x < 0$. Тогда $|x| = -x$. С другой стороны, $-x > 0$, так что $|-x| = -x$. Таким образом, и здесь равенство получено и теорема доказана: в обоих случаях $|x| = |-x|$.

Мы специально провели очень подробное доказательство, чтобы читатель имел перед глазами ясный образец работы с модулем и понял основной принцип: рассмотреть два случая, модуль уничтожить и... властвовать!

Немедленное упражнение: доказать, что $|x| \geq 0$.

Возникают, конечно же, вопросы. Ну ладно, с $|x|$ понятно, но что делать с $|x^2 - 1|$? А принцип бяки на что! Достаточно (даже мысленно) обозначить $x^2 - 1$ через y и рассмотреть случаи $y < 0$ и $y \geq 0$, т. е. $x^2 - 1 < 0$ и $x^2 - 1 \geq 0$, ну а дальше уже модуля не будет.

Ещё один вопрос: а что делать, когда модулей слишком много? Например, как доказывать неравенство $|x| + |y| \geq |x + y|$? Рассмотрение всех возможностей для модулей потребует $2^3 = 8$ вариантов. Конечно, можно попробовать, но не хочется. А хочется как-то сократить этот перебор. За счёт чего? Конечно же, за счёт техники сокращения перебора. Коль скоро это — техника, самое разумное — попросту продемонстрировать её, показав несколько стандартных, но эффективных приёмов.

Первый приём — симметрия. Как только мы заметили симметрию, надо сразу попробовать её использовать. Использование чаще всего состоит в том, что мы лишаем x и y равноправия за счёт какого-то более выгодного для нас условия. При этом расхожими являются фразы типа «пользуясь симметрией, можем считать...», «так как x и y равноправны, имеем право...», которые всегда означают одно: если нужное нам условие не выполняется, то выполняется противоположное, и мы можем просто переобозначить x через y , а y через x и всё равно получим нужное нам условие (так как задача симметрична, то от такого переобозначения она не изменится!).

В нашем случае мы, например, можем считать, что $x \geq y$ (потому что если это не выполнено, то выполнено $y \geq x$ и можно переобозначить). Это уже существенно сокращает количе-

4. Как бороться с модулями, или искусство перебора

ство вариантов, так как если $y \geq 0$, то автоматически $x \geq 0$ и $x + y \geq 0$, а если $x \leq 0$, то $y, x + y \leq 0$.

Второй приём. Его можно было бы назвать примерно так: манипуляции со знаками и использование чётных свойств функций. Ему обычно сопутствуют выражения типа «пользуясь чётностью (нечётностью) функции, можем считать, что...», смысл которых обычно состоит в том, что нет надобности рассматривать оба случая (больше нуля и меньше нуля), так как доказательства в них проходят почти слово в слово (с точностью до очевидных операций со знаками). Если угодно, можно считать, что вторая задача сводится к первой с помощью переобозначения $-x$ на x .

Чтобы разобрать это подробнее, надо немного поговорить о чётных и нечётных функциях. Удивительно, но эти простые понятия вызывают гораздо больше недоразумений, чем можно было бы от них ожидать. Первая трудность, видимо, лингвистического порядка: как-то по самому звучанию кажется, что любая функция либо чётная, либо нечётная, что на самом деле не так: большинство функций вообще не имеют чётности.

Но пора перейти к определениям. В любом учебнике можно найти формальное

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $f(x)$ называется чётной, если $f(-x) = f(x)$, и нечётной, если $f(-x) = -f(x)$.

Неформально и более понятно это означает следующий рецепт:

ПРОВЕРКА НА ЧЁТНОСТЬ.

Чтобы определить чётность функции заданной формулой, надо сделать следующее:

1. Во всех местах, куда входит x , заменить x на $(-x)$ (в скобках!).
2. Раскрыть скобки, произвести упрощения, стараясь истребить все минусы в скобках.
3. Если в результате получится та же формула, с которой мы начинали, то она — чётная.

4. Как бороться с модулями, или искусство перебора

4. Если же нет, то надо устроить ещё и сравнение с формулой, получающейся из исходной заключением её в скобки и приписыванием знака «минус» впереди; нельзя ли после раскрытия скобок получить совпадение. Если да, то функция нечётная.

5. Наконец, если ни тот, ни другой случай не имеет места, то и функция не имеет чётности.

Например, функция $x^4 - |x|$ чётная, так как $(-x)^4 - |(-x)| = x^4 - |x|$, а $x^3 - \sin x$ — нечётная, ибо

$$(-x)^3 - \sin(-x) = -x^3 - (-\sin x) = -x^3 + \sin x,$$

а с другой стороны, $-(x^3 - \sin x) = -x^3 + \sin x$. Наконец, функция $x^2 - x + 4$ не имеет чётности. Действительно, $(-x)^2 - (-x) + 4 = x^2 + x + 4$. На исходную функцию не похоже. Не похоже и на функцию $-(x^2 - x + 4) = -x^2 + x - 4$, так что никакой чётности нет и в помине.

Стандартный список чётных функций: константы, чётные степени (x^2, x^4, \dots), $|x|$, $\cos x$. Нечётные функции: нечётные степени ($x, x^3, 1/x, \dots$), $\sin x, \operatorname{tg} x$.

Резюмируя, можно сказать, что нечётные функции — это те, которые знак «минус» (–) «уважают» (выносят перед собой), чётные — те, которые его игнорируют. Действие же функции без чётности неопределённо.

На практике удобно использовать свойства чётных и нечётных функций для упрощения выражений (возьмите хотя бы $|-x|$ и $|x|$) и, как уже говорилось, сокращения перебора. Интересно, однако, попрактиковаться и в абстрактном определении, поработав с абстрактной функцией $f(x)$.

♣ **Задача.** Сумма функций одинаковой чётности — функция той же чётности.

Доказательство. Одинаковая чётность означает, что либо обе они чётные, либо обе нечётные. Рассмотрим, например, случай обеих нечётных функций (случай чётных — упражнение). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — нечётные. Надо сказать, что $(f + g)(x)$ тоже нечётная. Итак, имеем $f(-x) = -f(x)$, $g(-x) =$

4. Как бороться с модулями, или искусство перебора

$= -g(x)$, надо доказать, что $(f + g)(-x) = -(f + g)(x)$. Но это действительно нетрудно проверить:

$$\begin{aligned}(f + g)(-x) &= f(-x) + g(-x) = -f(x) + (-g(x)) = \\ &= -f(x) - g(x) = -(f(x) + g(x)) = -(f + g)(x).\end{aligned}$$

Задачи для читателей

1. Что можно сказать о сумме нечётной и чётной функций?
2. Докажите следующую таблицу умножения для чётности произведения (а также деления):

	ч	н
ч	ч	н
н	н	ч

В таблице: ч — чёт, н — нечёт, например, (чётная) \times (нечётная) = нечётная. Приведённую таблицу сравните с таблицей

	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

Сравнение объясняет, почему слово «нечётный» часто обозначают минус единицей, а «чётный» — плюс.

3. Может ли функция быть чётной и нечётной одновременно?

4. Что можно сказать о производных с точки зрения чётности?

5. Функции $f(x)$ и $1/f(x)$ одинаковой чётности?

Эти задачи существенно расширяют запас чётных и нечётных функций. Например, ясно, что функция $\frac{x^{1986} - |x^3| + 5}{\sin 3x}$ является нечётной.

Очень красива следующая задача, неожиданная хотя бы потому, что, как уже говорилось, большинство функций не имеют чётности.

4. Как бороться с модулями, или искусство перебора

ТЕОРЕМА. Любая функция $f(x)$ однозначно представима в виде суммы чётной и нечётной функции.

Например, вышеуказанная функция $x^2 - x + 4$ раскладывается так: $(x^2 + 4) + (-x)$. Прежде чем прочесть решение, читатель должен поискать его сам.

Поиск решения. Как всегда, когда задача на уровне определений, надо просто хорошо понять, что требуется. Вроде бы понятно: надо, чтобы f представлялась в виде суммы какой-то чётной функции f_1 и нечётной f_2 . Запишем $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. Пока никаких идей. Но запишем ещё и условия чётности: $f_1(-x) = f_1(x)$; $f_2(-x) = -f_2(x)$. Если долго смотреть на эти формулы, то должна прийти в голову и четвёртая, явно дополняющая их до гармонии: $f(-x) = f_1(-x) + f_2(-x)$. (Это просто исходная формула, в которой вместо x подставлено $(-x)$). И тут... мы получили систему из четырёх уравнений и четырёх неизвестных, коими являются $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_1(-x)$, $f_2(-x)$. Решить её уже несложно, мы это предоставим читателю, а сами выпишем только ответ:

$$f(x) = \left(\frac{f(x) + f(-x)}{2} \right) + \left(\frac{f(x) - f(-x)}{2} \right).$$

Разумеется, эта формула и есть всё доказательство, но если бы мы сразу её выписали, чему бы научило такое доказательство?

О чётности мы ещё поговорим в других главах, а пока вернёмся к манипуляциям со знаками в задаче про неравенство с модулями.

Приведём полное решение, учитывающее как симметрию, так и чётность.

Доказательство неравенства $|x| + |y| \geq |x + y|$. Пользуясь чётностью функции модуль, мы можем с самого начала считать, что $x + y \geq 0$ (другими словами, если это не так, то переобозначаем x на $-x$ и y на $-y$, от чего условия задачи не изменятся). Это условие симметрично, так что дополнительно можем считать, что $x \geq y \Rightarrow x \geq 0$ (иначе $x + y < 0$). Значит,

4. Как бороться с модулями, или искусство перебора

нам осталось доказать неравенство $x + |y| \geq x + y$ (мы воспользовались свойствами модуля), т. е. $|y| \geq y$, которое есть равенство в случае $y \geq 0$ и очевидно в случае, если $y < 0$ (так как $|y| \geq 0$).

✦ **УПРАЖНЕНИЕ.** Построить график функции $|x| + |y| = 1$. Это упражнение хорошо объясняет геометрическую природу чётности графиков.

Итак, мы выяснили, что бороться с модулями надо с помощью перебора вариантов. Покажем теперь, как сокращать перебор в том случае, когда модулей много. Решающую роль в этом играет метод интервалов.

Сначала — магическое заклинание. Вот что следует, не думая, писать, когда решаешь задачи с модулями:

«Найдём точки, где модули обращаются в нуль... (находим). Отметим эти точки на числовой прямой (отмечаем). Тогда прямая разобьётся на несколько интервалов. Решая задачу в каждом из интервалов по отдельности, получаем совокупность систем...».

А вот как это делается на конкретных примерах. Чтобы не загромождать книгу ненужными и безыдейными техническими вычислениями, мы будем считать, что и два модуля — это уже много, тем более, что и здесь достигается некая экономия.

✦ **Задача.** Решить уравнение

$$|2x - 4| + |x - 1| = 5.$$

Прямой перебор потребует четыре варианта (при трёх модулях их было бы уже восемь). Метод интервалов требует только трёх (и четырёх — для трёх модулей).

$$\begin{array}{c} (4 - 2x) + (1 - x) = 5 \quad | \quad | \quad (2x - 4) + (x - 1) = 5 \\ \hline \quad \quad \quad | \quad (4 - 2x) + (x - 1) = 5 \quad | \\ \quad \quad \quad 1 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 2 \end{array}$$

Метод интервалов

4. Как бороться с модулями, или искусство перебора

Начнём. Найдём точки, где модули обращаются в нуль — это точки $x=2$ и $x=1$. Отметив их на числовой прямой, получим три интервала. Решая задачу в каждом из интервалов по отдельности, получаем совокупность систем:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \geq 2, \\ (2x - 4) + (x - 1) = 5; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq x \leq 2, \\ (1 - 2x) + (x - 1) = 5; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x \leq 1, \\ (4 - 2x) + (1 - x) = 5. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Особых комментариев здесь не требуется. Рассмотрим, например, вторую систему. В ней выражение под знаком первого модуля отрицательно (чтобы проверить, можно подставить любую точку из интервала, например 1,5), а под знаком второго модуля — положительное число. В соответствии с этим и раскрыты оба модуля. Ну а дальше уже без модулей делать нечего. Два решения $x=0$ и $x=10/3$. Отметим, что вторая система решений не дала (помешало неравенство). Бывает также, что одно и то же решение появляется в двух системах: в одной оно отбрасывается неравенством, а в другой нет. Наконец, иногда уравнение вообще «пропадает». В этом случае следует руководствоваться неравенством, так что в ответе у уравнения может оказаться целый интервал.

При указанной методике, когда вся совокупность равенств и неравенств выписывается сразу, писать приходится немного больше, но зато очень редко допускаются ошибки. Чаще же опытные люди выписывают только один раз неравенство, а затем работают только с уравнением и... в конце забывают проверить, удовлетворяет ли ответ неравенству.

Два простых упражнения (первое — с подвохом):

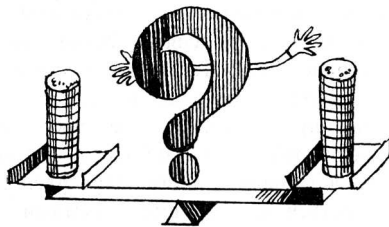
$$\begin{aligned} |x - 1| + |x| &= 1; \\ |x^2 - 1| + |x| + |x - 3| &= 6. \end{aligned}$$

4. Как бороться с модулями, или искусство перебора

Говоря о методе интервалов, нельзя не упомянуть о методе интервалов в решении неравенств. Ужасает, когда учащийся решает неравенство вида $\frac{x(x-2)}{x-1} < 0$ следующим образом: «Чтобы дробь была отрицательна, надо, чтобы либо числитель был отрицательный, а знаменатель положительный, либо числитель отрицателен, а знаменатель положителен...». Не надо уподобляться народному лекарю Богомолу из книги «Золотой ключик, или приключения Буратино», который рассуждал так: «Одно из двух — или пациент жив, или он умер. Если он жив — он останется жив или он не останется жив. Если он мёртв — его можно оживить или нельзя оживить». Тем более, что результат таких рассуждений (лечить «или касторкой, или не касторкой») обычно достаточно убог.

Правильно и грамотно такие задачи решаются методом интервалов, а вот как — это дело каждого незнающего: он обязан изучить этот исключительно важный для каждого учащегося метод по любому пособию или учебнику. Можно даже самому придумать этот метод, руководствуясь методом интервалов для модулей. Мы же лучше займёмся фальшивомонетчиками.

✦ **Задача.** Перед Вами 12 монет, ничем не отличающихся друг от друга по виду. Одна из них фальшивая — она легче или тяжелее, чем остальные, но что именно — неизвестно. Требуется с помощью трёх взвешиваний на рычажных весах найти эту монету и заодно выяснить, легче она или тяжелее остальных.



Где фальшивая монета?

4. Как бороться с модулями, или искусство перебора

Поиск решения. Попробуем бездумно сразу положить шесть монет на одну чашу весов, шесть на другую и... И что дальше? Какая-то чаша перевесит, но мы даже не знаем, в какой из них монета фальшивая. Да-а-а. Впрочем, разузнать, в какой половине была фальшивая монета, можно во время следующего взвешивания: достаточно взять любые шесть монет с одной из чашек, разделить их на тройки и сравнить. Если вес одинаков, то фальшивая монета одна из оставшихся шести, и мы даже узнаем, легче фальшивая монета или тяжелее. Если же нет, то фальшивая монета в одной из этих двух троек. Но вот в какой? Да, понятно, что за одно взвешивание ни ту ни другую проблему не решить. Значит, не тот путь. Что же делать? Перебирать все возможные начальные взвешивания? Малоперспективно. Пожалуй, надо пока накопить некоторый статистический материал, а именно, что можно сделать за два взвешивания? В самом деле, сколько монет поддаётся проверке за два взвешивания? Если монеты две... то вообще ничего не узнаешь, сколько ни взвешивай. Гм, почему бы это? А если три? А-а-а, вот в чём дело: тут уже есть по крайней мере две хорошие монеты, и мы их вполне можем выделить в тот момент, когда весы уравновесятся (равновесие могут дать только хорошие монеты).

Итак, как мы поступим в случае трёх монет? Первый шаг ясен: кладём на весы по монете. В случае равенства оставшаяся — фальшивая, а эти хорошие. На следующем шаге сравниваем фальшивую с хорошей и выясняем, легче она или тяжелее. Отлично. А если неравенство? Тогда оставшаяся — хорошая. Заменяем её на одну из тех, что лежат на чашах, и... всё в порядке: равенство — фальшивую сняли и мы уже знаем, легче она или тяжелее (по результатам предыдущего взвешивания), неравенство — на чаше фальшивая монета. Прекрасно!

Попробуем разобраться с четырьмя монетами. Если положить при первом взвешивании только по одной монете на каждую чашу, то неприятным вариантом будет равенство. Тогда останутся две монеты и одно взвешивание. Тут нель-

4. Как бороться с модулями, или искусство перебора

зя получить полную информацию: если мы возьмём из этих оставшихся на весы только одну монету и получим равенство, то вторая будет фальшивой, но мы так и не узнаем, легче она или тяжелее. А если возьмём обе? На разные чаши класть их нет смысла: получим неравенство, ну и что? На одну — тем более: мы, конечно, узнаем, легче фальшивая монета или тяжелее, но какая из них — ни за что. Таким образом, надо при первом же взвешивании класть все четыре монеты на весы: две с одной стороны, две с другой. Ясное дело, получим неравенство и останется всего одно взвешивание. Нет, не хватит, не может хватить в принципе. Значит, вывод грустный: нельзя оставлять четыре монеты после первого взвешивания. Но тогда надо взвешивать по пять или по шесть. По шесть мы уже пробовали — не получается. По пять? В случае равенства одна из двух оставшихся фальшивая, и узнать, какая именно, за два взвешивания реально: надо сравнивать с хорошими. А вот если неравенство, то уже тяжко. Ведь не получено почти никакой информации, и если мы займёмся одной половиной, то за одно взвешивание всё равно про неё всё не узнаем. А плохая монета вполне может быть одной из пяти оставшихся. Не выходит. Впрочем, есть идея: поменять местами по две монеты. Тогда если неравенство поменяет знак, то фальшивая — одна из этих четырёх, а если нет, то одна из шести тех, которые мы не трогали. Но определить за одно взвешивание — из шести монет — никогда! Что ж, выходит, не решается задача. Но этого не может быть, не зря же нас заставили её решать. Значит, где-то в рассуждениях ошибка.

Посмотрим весь ход рассуждений заново (а ещё полезнее в таких случаях заново записывать, не глядя в предыдущее, чего мы, правда, делать не будем). Итак... Первый подозрительный момент: почему всё-таки для двух монет задача неразрешима? С одной стороны, понятно, а с другой — то и дело сравниваем две монеты. Может, тут-то и есть заковырка? В самом деле, почему ровно для двух монет неразрешима, а если их больше, то... Грандиозно! Ведь точно такая же ошибка сде-

4. Как бороться с модулями, или искусство перебора

лана в другом месте, когда мы решили, что нельзя сводить дело к четырём монетам. Там же не просто четыре монеты будет, а ещё и восемь настоящих! А с их помощью что-нибудь хорошее можно сделать. Что? Просмотрим быстренько наш анализ, где она, голубушка, хорошая монетка, нас из беды может выручить? Да, только в одном месте — её сразу надо класть на весы, а одну из четырёх подозреваемых не брать. Теперь, если равенство — всё в порядке: невзятая четвёртая и есть фальшивая. А если неравенство? Тогда... можно попробовать сделать то же, что мы уже пробовали: сравнить две подозреваемые с одной чаши. Если неравенство, то..., понятно, фальшивая среди них, и предыдущее взвешивание указало — легче она или тяжелее, значит, можно выбрать её. Если же равенство, то фальшивая — оставшаяся на другой чаше, и опять же ясно, легче она или тяжелее. Ура! Теперь первое взвешивание в нашей задаче понятно: надо взвешивать по четыре монеты. В случае равенства мы уже знаем, как поступать (а случай неравенства читатель разберёт сам).

Приходится просить у читателя прощение за несколько тяжеловесный текст. Остаётся только надеяться, что он всё же попробовал хоть немного порешать задачу самостоятельно если не с монетами, то с карандашом и бумагой. Быть может, этот текст запутан так, как обычно бывают запутаны наши мысли, а может, всё объясняется проще: кто ясно мыслит, тот ясно излагает!

Если же серьёзно, то в этом фрагменте автор пытался показать, как именно возникают ошибки и как стоит их исправлять! Умение исправлять ошибки гораздо ценнее умения их не делать, и ему, в отличие от второго, *можно* научиться.

Следует обратить внимание на то, как решалась проблема перебора. Мы не бросились сразу в полный перебор, хотя отказать себе в первом шаге было трудно и не нужно. Зато, как только возникал маленький перебор (случай трёх, четырёх монет), мы его проводили полностью и со всей тщательностью (оттого и в тексте перегрузка). Только после этих попыток,

4. Как бороться с модулями, или искусство перебора

нащупав наиболее предпочтительные ходы перебора, мы ринулись на основной случай.

Хочется надеяться, что задача (а ей не один век) понравилась читателю и он попробует найти общее решение: какое максимальное число монет можно проверить на наличие одной фальшивой с помощью k взвешиваний. (Пока мы установили, что эти 4 при $k = 2$ и 12 при $k = 3$. Точнее, мы установили, что эти числа подходят, но ещё не убедились в их максимальной.) Полное решение опубликовано в книге Жана-Клода Байифа «Логические задачи».

Приведём ещё один типичный пример переборной задачи.

♣ **Задача.** Из 11 шаров 2 радиоактивны. Про любую кучу шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в ней хоть один радиоактивный шар (но нельзя узнать, сколько таких шаров в куче). Доказать, что менее чем за семь проверок нельзя гарантировать нахождение обоих радиоактивных шаров. Доказать, что если шаров 19, то за восемь проверок всегда можно выделить оба радиоактивных шара.

Эта задача несколько труднее и непривычнее, но решать её очень приятно. Опять же, рекомендуется сформулировать и решить общий случай (для двух радиоактивных шаров). Мы, однако, эту задачу решать не будем, а перейдём к следующей поразительной по своей постановке задаче.

♣ **Задача.** Представим себе разговор трёх математиков. Чтобы они обрели право гражданства, дадим каждому имя и фамилию: Коля Загадочный, Вася Суммирующий и Петя Множитель. Итак, между ними произошла следующая увлекательная беседа:

Коля. Друзья! Я загадал два натуральных числа.

Петя. Разных?

Коля. Не скажу. Может быть, и одинаковых.

Вася. А что скажешь?

Коля. А скажу вот что: их сумму и произведение.

Петя. Ну-у, это неинтересно, это всё равно что сказать сами числа — систему уравнений уж мы как-нибудь решим.

4. Как бороться с модулями, или искусство перебора



Я знаю, что ты знаешь, что я знаю

Вася. Не говоря уже о теореме Виета, по которой их можно найти сразу, решив квадратное уравнение.

Коля. Вы зря торопитесь, друзья. Всё дело в том, что одному из вас я скажу сумму, а другому — произведение, так что каждый из вас будет знать только по одному числу.

Петя. Ну, говори же быстрее.

Коля. Тебе, дорогой товарищ Множитель, я, конечно же, скажу произведение этих чисел (говорит ему на ухо, после чего лицо у Пети вытягивается). Ну что, знаешь ты, какие я числа задумал?

Петя. Не-а.

Коля. Ещё бы! А тебе, Вася Суммирующий, я, естественно, скажу сумму (говорит ему на ухо, после чего лицо у Васи тоже вытягивается). Ну что, знаешь, какие это числа?

Вася. Конечно, нет. Можно подумать, что ты и сам этого не знаешь.

Коля. Я-то знаю, но надо, чтобы и Петя знал! Кстати, Петя ты всё ещё не знаешь, что за числа я задумал?

Петя. Увы.

Коля. А ты, Вася?

Вася. Спроси-ка лучше Петю.

Коля. Ну и спрошу. Как, Петя, ты уже знаешь эти числа?

4. Как бороться с модулями, или искусство перебора

Петя. Знаю!

Вася. Ну, тогда и я знаю!

Спрашивается, что же за числа задумал Коля Загадочный и как его друзья отгадали их?

Поиск решения. Конечно же, в первую очередь хочется посоветовать читателю самостоятельно понять суть дела: уж больно завлекательная задачка! Но если у него нет на это времени, что ж, приглашаем его искать вместе.

Первое подозрение, что здесь какое-то жульничество: из ничего не возникает что-то! Откуда, в самом деле, Петя мог узнать то, чего он не знал раньше? Не подмаргивали, же, в самом деле, Петя с Васей друг другу. Приходится допустить, что нет. (Кстати, самое трудное в этой задаче — поверить в неё!) Как же тогда за неё братья? Попробуем перебор. Какими могли бы быть числа? Самый простой вариант: 1 и 1. Но тогда Множитель сразу бы догадался, да и у Суммирующего бы сомнений в том, что это за числа, не было. То же самое можно было бы сказать о варианте 1 и 2: оба ответят с первого раза, и по сумме и по произведению числа легко отгадываются. Ладно. Если же 1 и 3, то Петя всё равно ответит сразу, а вот Вася не будет знать, что за числа: то ли 2 и 2, то ли 1 и 3 — в обоих случаях сумма равняется четырём. Интересно! А если числа 2 и 2 — то тут уже замолчат оба. Так, понятного мало, но зато есть чёткий вопрос: когда именно мог бы ответить правильно Петя Множитель уже с первого раза? Ну что ж, здесь ответ очевиден: когда он услышал от Коли число, являющееся простым (или единицу). Во всех остальных случаях он ничего путного сказать не может: могут быть два разных разложения на множители. Даже четвёрку можно представить как дважды два и как четыре, умноженное на один. Ясно. А в каком случае Вася может с первого же раза заявить, что он знает числа? Конечно же, только тогда, когда сумма маленькая: 1, 2, 3. Ой, 1 даже не может быть. И всё? Нет, если он услышал, что Петя заявил, не раздумывая, будто он знает числа, то он тут же должен сообразить, что их произведение — про-

4. Как бороться с модулями, или искусство перебора

стое число (иначе, как бы Петя догадался?), и, может быть, сумел бы догадаться. Ну конечно, например, если бы он знал, что сумма 4, и услышал, что Петя знает числа, то он моментально понял бы, что это 1 и 3, так как второй вариант 2 и 2 невозможен, ибо произведение было бы непростым. Точно так же он разобрался бы с суммой 6: единственный вариант простого числа — это 1 и 5. А вот сумма 5 вообще не могла бы быть. Да, но это всё в том случае, когда Петя говорил, что он знает числа — это ведь такая мощная информация! Но Петя-то молчал — какая это информация? Но... Конечно же! Это и есть информация — то, что молчал. Это значит, что он, по существу, передал очень ценную информацию: произведение задуманных чисел *не является* простым числом. Значит, Вася, будучи опрошен первый раз, знал следующее: сумму чисел и то, что их произведение простым числом быть не может. Тогда надо быстро перебрать: для какой суммы он мог бы уже сказать числа при первом же ответе? Числа 2, 3 — это мы уже перебрали. Что следующее? Четыре. Годится! Если бы ему сообщили сумму 4, то он, зная, что произведение — число составное, немедленно объявил бы загаданные числа: 2 и 2. Ещё? Пятёрка — молчание. Шестёрка? Один вариант — $1 + 5$ — отбрасывается, но выбрать между $2 + 4$ и $3 + 3$ пока не представляется возможным. Семь, восемь, девять — всё это по тем же причинам не подходит. Большие числа, видимо, и проверять не стоит (на этапе поиска решения наверняка, хотя на этапе чистки придётся это как-то обосновывать). Вывод: распознать Колины числа после первого вопроса Вася смог бы только в том случае, если бы это было 4 (конечно же, при условии молчания Пети при первом вопросе).

Следующий шаг. В каких случаях Петя установил бы число после второго вопроса? Войдём в его положение. Что нового он узнал к этому времени? Только то, что Вася чисел до сих пор не знает (ситуация, как в кино, «я знаю, что ты знаешь, что я знаю»). Значит, информация только такая: сумма чисел не равняется четырём (иначе Вася не молчал бы). Но это

4. Как бороться с модулями, или искусство перебора

прекрасно! Значит, если бы Пете сообщили произведение 4, то тут-то он бы числа и расшифровал: это оказались бы 1 и 4, потому как 2 и 2 быть не может (сумма 4). Дальнейшее уже ясно. Раз и он промолчал, то Вася догадался, что произведение не 4, и если у него сумма 5, то он при втором вопросе громко-гласно заявил бы: числа эти суть 2 и 3. Но Вася не проявил такой эрудиции. Тут-то Петя и смекнул, что сумма чисел — не пять. И Петя ответил. А в каком случае он мог это сделать? Да только в одном: когда сообщённое ему произведение равно шести. Тогда вариант 2×3 не годится, так как сумма не 5, и осталось заключить, что искомые числа — это 1 и 6. Всё.

Поистине, «все несчастья на Земле от недостатка информации».

Хочется надеяться, что эта задача послужит неплохим источником размышлений. Обобщать её можно в большом количестве направлений. Заменить сумму на разность, увеличить количество вопросов, запретить одинаковые числа — вот только первые пришедшие в голову способы.

И вновь подчеркнём, что мы не стали делать с самого начала полный перебор. Хотя как раз в подобных задачах полный перебор возможностей самый быстрый (по времени), но не самый короткий (по написанию) способ решения задачи. Здесь по постановке уже чувствовалось, что о больших числах речи быть не может. Почти всегда полезен перебор в задачах про цифры, которых всего десять штук. Например, так можно решать 80% числовых ребусов типа

$$\begin{array}{r} \text{СНЕГ} \\ + \text{КРУГ} \\ \hline \text{СПОРТ} \end{array}$$

Поиск решения. Напомним, что в таких задачах одинаковые буквы означают одинаковые цифры, а разные — разные (о разных буквах часто забывают).

Разумеется, мы не ринемся сломя голову в полный перебор, а попытаемся вначале проанализировать, что у нас есть. Преж-

4. Как бороться с модулями, или искусство перебора

де всего, у нас есть 10 различных букв. Это значит, что все цифры задействованы. Полный перебор всех возможностей занял бы слишком много времени (10! вариантов), поэтому попробуем несколько его ограничить. В первую очередь (это часто первый шаг в таких задачах) смотрим на количество цифр в каждом числе. Явно, что при сложении оно увеличилось. За счёт чего? Разумеется, только за счёт перенесения единицы в следующий разряд. Поэтому чёткий вывод: буква С — это единица. Запишем её в пример:

$$\begin{array}{r} + 1 \dots \\ \dots \\ \hline 1 \dots \end{array}$$

Да, но что можно прибавить к единице, чтобы получилось переполнение и понадобилось переносить единицу в следующий разряд? Из цифр — это только 9. Хотя может быть и 8, если одна единица перенесётся из предыдущего разряда. Значит, здесь два варианта. Что представляет собой буква П в любом из них? Либо 0, либо 1 (может получиться 10 или 11, но не больше, когда к цифре прибавляем единицу, и ещё одна единица, быть может, переносится из предыдущего разряда). Но 1 быть не может — эта цифра уже использована, а разные буквы обозначают разные цифры. Мораль: П — это 0. Тут небольшая неприятность — надо уметь отличать букву О от цифры 0. Чтобы это сделать, мы будем писать цифру потоньше.

Теперь наш пример выглядит так:

$$\begin{array}{r} + 1\text{НЕГ} \\ \text{КРУГ} \\ \hline 10\text{ОРТ} \end{array} \quad \begin{array}{r} + 1 \dots \\ \dots \\ \hline 10 \dots \end{array}$$

Причём К — это 8 или 9. Ещё одно заключение мы можем сделать, глядя на последние цифры: Т должна быть чётной, так как она — последняя цифра суммы Г + Г. При этом Т — не нуль, так как нуль уже занят. Так что для Т только четыре возможности 2, 4, 6, 8. Большого рассмотреть пока не удаётся,

4. Как бороться с модулями, или искусство перебора

и мы вынуждены начать перебор. Сначала прикинем, насколько он велик. Для К — два варианта, для Г — четыре, оставшиеся шесть букв дают $6! = 720$ вариантов. Многовато, но есть надежда, что при более подробном знакомстве с каждым из них количество вариантов, подлежащих перебору, уменьшится. Да и сейчас оно хоть и очень велико, но уже реально. Начнём. Рассмотрим первый случай.

А. К = 8. Тогда для Г остаётся только три возможности: 2, 4, 6. Рассмотрим первую из них:

АА. Г = 2. Тогда пример будет выглядеть так:

$$\begin{array}{r} + \text{1НЕГ} \\ \text{8РУГ} \\ \hline \text{10ОР2} \end{array}$$

Для буквы Г могут быть только две возможности: 1 и 6, причём первая исключается. Остаётся Г = 6:

$$\begin{array}{r} + \text{1.6} \\ \text{8.6} \\ \hline \text{10.2} \end{array}$$

Для буквы Р у нас осталось пять возможностей. Переберём их все:

ААА. Р = 3. Для того чтобы $1 + 8$ дотянуло до десяти, нам нужно переполнение. Поэтому число Н должно быть достаточно велико. При наших оставшихся возможностях это либо 7, либо 9. Рассмотрим каждую из них.

АААА. Н = 7. Имеем:

$$\begin{array}{r} + \text{17.6} \\ \text{83.6} \\ \hline \text{10.32} \end{array}$$

Вот и первое противоречие: $3 + 7 = 10$, так что буква О должна быть либо нулём, либо (если перенеслась единица из предыдущего разряда) единицей. Но и та и другая цифра уже заняты. Этот вариант полностью разобран. Заодно мы отыскали ещё

4. Как бороться с модулями, или искусство перебора

одно слабое место, которое тут же попробуем использовать в следующем варианте.

АААВ. $N=9$. Тогда буква О должна быть либо двойкой, либо тройкой. Но обе цифры уже заняты. Противоречие. Случай $P=3$ полностью разобран. Переходим к следующему.

ААВ. $P=4$. Попробуем использовать только что освоенную методику. Для переполнения в разряде нужно либо $N=5$, либо $N=7$, либо $N=9$.

ААВА. $N=5$, Тогда $N+P=9$. Чтобы возникло переполнение, нужна ещё одна единица, и получится 10. Но тогда $0=O$, что невозможно.

ААВВ. $N=7$. Тогда О либо 1, либо 2 — и то и другое невозможно.

ААВВ. $N=9$. Тогда О должно равняться трём либо четырём. Четвёрка занята, а тройка вполне возможна. Рассмотрим повнимательнее:

$$\begin{array}{r} 19.6 \\ + 84.6 \\ \hline 10342 \end{array}$$

Оставшиеся две цифры 5 и 7 четвёрку нам не дадут. Это, следовательно, второе слабое место. Запомним.

ААВ. $P=5$. Опять возможны только два кандидата на роль N : 7 и 9.

ААВА. $N=7$. Тогда вынужденно $O=3$. Имеем

$$\begin{array}{r} 17.6 \\ + 85.6 \\ \hline 10352 \end{array}$$

Увы, 4 и 9 с оставшимися для них ролями не справляются. Опять подводит второе слабое место. А не попробовать ли в следующем разборе сразу на нём сыграть?

ААВВ. $N=9$. С учётом переноса единицы сумма $E+U$ должна, оказывается, оканчиваться на 4. Из цифр, которые остались в нашем распоряжении (3, 4, 7), такого не соорудишь. Да, второе слабое место оказывается ещё более слабым, чем пер-

4. Как бороться с модулями, или искусство перебора

вое. Надо было с него и начинать! Ничего, попробуем делать так в следующих вариантах.

ААГ. $P = 7$. Тогда сумма $E + U$ должна оканчиваться на 6. В нашем распоряжении цифры 3, 4, 5, 9. Легко видеть, что такого не получится.

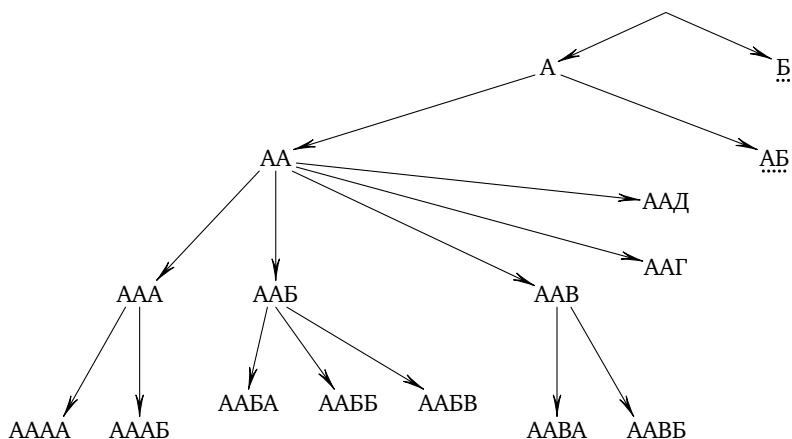
ААД. $P = 9$. Тогда сумма $E + U$ должна оканчиваться на 8. Единственный вариант получить это — $3 + 5$. Тогда для цифр Н и О остаются кандидаты 4 и 7. Ни так, ни эдак не получится.

Вариант АА полностью рассмотрен. Оказалось, что он невозможен. Мы не будем утомлять читателя перебором оставшихся вариантов. Если он захочет, то проделает эту работу самостоятельно.

Так много было написано не случайно. Хотелось бы всё-таки показать пример настоящего перебора, который проводит в своей работе математик (хотя, конечно, не для таких задач). Более того, этот пример — поиск решения так и рождался, как здесь написано, непосредственно при написании текста главы. Хотелось бы обратить внимание на следующие моменты. Во-первых, когда мы начали перебор — когда он стал казаться реальным (скажем, за несколько дней непрерывной работы) и когда уже не было видно реальных путей его сокращения. Во-вторых, заметьте, что эти реальные пути открылись уже после того, как мы начали перебор. Ведь последние варианты мы уже разбирали гораздо эффективнее, чем первые. И третье. Хочется обратить внимание на способ нумерации вариантов — как в словаре. При этом, когда мы рассматривали вариант ААВБ, к нему относилось всё, что сказано в пунктах А, АА, ААВ, но не относилось сказанное в пункте, скажем, ААБ. Это — довольно удобный способ нумерации вариантов в переборных задачах (а если не следить за их нумерацией, неминуемо запутаешься и какой-нибудь случай да прозеваешь), и называется он лексикографическим.

Невозможно окончить эту главу, не сказав хотя бы нескольких слов о той исключительно важной роли, которую играет метод перебора сегодня. Ещё лет 30 назад перебор, в котором

4. Как бороться с модулями, или искусство перебора



Лексикографический перебор

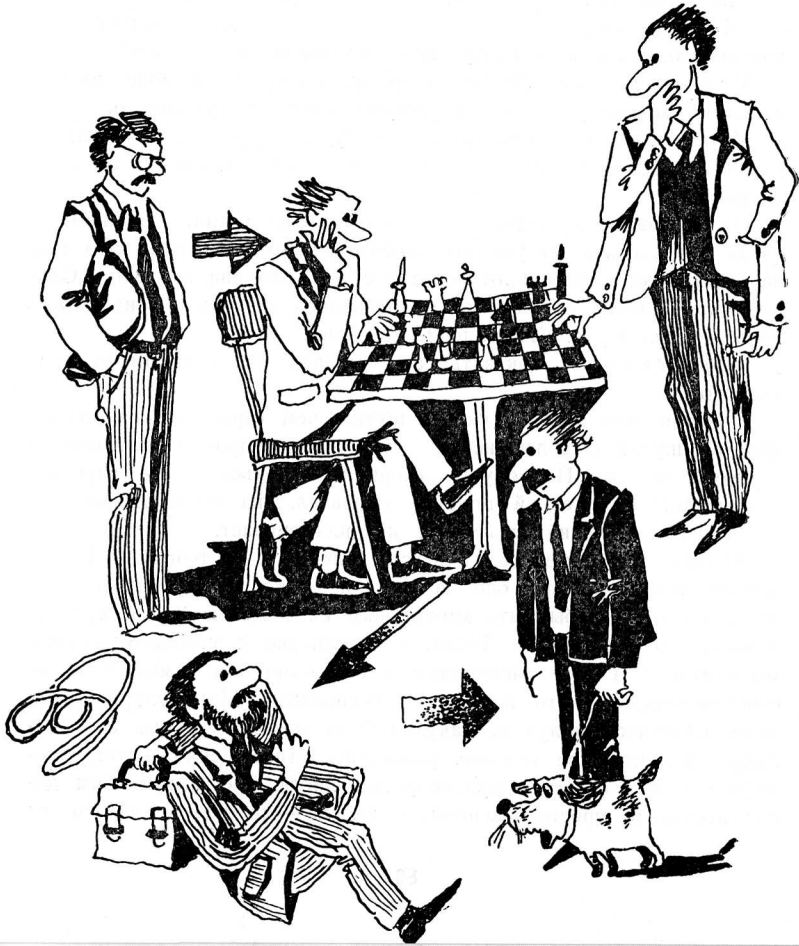
надо было разобрать миллион вариантов, считался практически неосуществимым. Это значительно ограничивало возможности метода, и в серьёзных задачах к нему прибегали только в самых крайних случаях, когда ничего другого найти просто не удавалось. Причём задача уже с сотней вариантов считалась очень тяжёлой, а об умельцах, способных разобрать десять тысяч вариантов, ходили легенды. Причину этого понять несложно: даже если считать, что один вариант отнимет только час, то сто часов рутинной, однообразной работы, как правило, требующей скрупулёзной точности — это суровое наказание.

С появлением компьютеров ситуация коренным образом переменилась. Сейчас, когда быстродействие даже персональных компьютеров измеряется миллионами операций в секунду, возможности перебора существенно расширились. Никто уже не боится миллиона вариантов, если... он умеет программировать, потому что главная задача в методе перебора сегодня — правильно выбрать и запрограммировать алгоритм перебора, а скрупулёзно точно считать варианты, не засыпая при этом от скуки однообразия, будет машина. Чтобы не хо-

4. Как бороться с модулями, или искусство перебора

доть далеко за примерами, заметим, что рассмотренный спортивно-числовой ребус решался автором отнюдь не так, как он тут выше писал. Просто минут за 15 прямо за компьютером была набрана примитивнейшая программа перебора вариантов, ещё минут 15 она отлаживалась, а на счёт времени ушло меньше, чем на прочтение этого предложения...

О ПРОТИВНЫХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВАХ



5. О противных доказательствах

— Откуда вы знаете, что я не в своём уме? — спросила Алиса.

— Конечно, не в своём, — ответил Кот. — Иначе как бы ты здесь оказалась?

Л. Кэрролл. Алиса в стране чудес

Эта глава призвана убедить читателя, что самый удобный и самый элегантный способ доказательства — это доказательство от противного. Начнём со следующего ошеломляющего факта.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Любую теорему, которую вообще можно доказать, можно доказать и рассуждением от противного.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим теорему, которую можно как-то доказать. Приведём для неё следующее доказательство от противного.

Предположим противное — что теорема неверна. Докажем её (ведь это сделать по условию как-то можно). Получим, что она верна, что есть явное противоречие с тем, что она неверна. Следовательно, наше предположение оказалось неверным и на самом деле теорема верна. Утверждение доказано.

❖ **УПРАЖНЕНИЕ.** Доказать само утверждение методом от противного.

Понятно, что всё это скорее шутка, чем серьёзная аргументация, но шутка с долей истины (всё, между прочим, совершенно строго и верно). Попробуем теперь разобраться более глубоко, что представляет собой приём доказательства от противного и какие удобства он нам действительно обеспечивает.

Кратко — суть метода. Берётся утверждение теоремы. Выражается сомнение, что оно истинно, и чётко формулируется то, что должно было бы быть вместо него (магическая фраза: предположим, что напротив...). Тогда, в дополнение к условиям задачи, мы получаем в своё распоряжение ещё одно (на самом деле не существующее, но это нас мало беспокоит). Манипулируя всем этим, стремятся получить какую-нибудь математическую бессмыслицу — невозможное условие, равенство, утверждение и тому подобное, одним словом —

5. О противных доказательствах

противоречие: иногда — с самим этим дополнительным предположением, а иногда — вообще с чем-то из другой области. (В теории групп довольно-таки часто противоречием является какой-нибудь факт из алгебраической теории чисел.)

Самое замечательное, что можно по-прежнему доказывать теорему — противоречие будет с предположением о том, что она не верна. Основное достоинство метода — широта. Вместо узкой цели — доказательства конкретного факта — у нас грандиозный выбор: отыскать противоречие с любым разделом математики. Основное удобство — у нас условий на одно больше, а самое главное, это дополнительное условие может оказаться гораздо более сильным, чем исходные, потому что позволяет строить несуществующие объекты (а про несуществующий объект можно доказать любой факт, другое дело — как). И ещё раз повторим — можно и просто доказать саму теорему, но имея в запасе на одно предположение больше. Начнём с одного из самых древних образцов «противного» доказательства.

ТЕОРЕМА. Простых чисел бесконечно много.

Поиск решения. Как подступиться к этой задаче? Первая и естественная попытка — построить простые числа конструктивно одно за другим. Мы опустим сей «судорожный» этап, так как этого пока не умеет делать никто — никому не известна удобная единая формула для простых чисел (хотя есть замечательный результат Матияевича: существует многочлен от нескольких переменных, значения которого при различных натуральных аргументах — все простые числа, и только они). Можно как-то связать простые числа с рядами (так поступил в своём доказательстве Эйлер), но надо хотя бы знать, что это за зверь такой — ряд.

А что если предположить противное? Предположим, что, напротив, простых чисел конечное число. Тогда есть и последнее (вот он — несуществующий объект!). Ну-у, вообще это как-то несолидно — что же, после него не будет ни одного простого числа? Тогда всё, что больше него, должно делиться

на одно из этого конечного списка простых чисел? Ну это уж вряд ли! Наверняка можно соорудить такое число, чтобы оно не делилось ни на одно из них. Вообще для любого конечного набора чисел можно найти такое число, которое ни на одно из них не делится, — это ясно! Например, взять их все, перемножить и прибавить единицу. Вот и всё — тут-то и будет противоречие.

Чистка решения предоставляется читателю.

Этот пример не только убедительно демонстрирует преимущества несуществующих объектов, но и отчётливо показывает главный недостаток доказательств от противного — их неконструктивность. Зачастую из доказательства нельзя извлечь ничего, кроме самого утверждения. Например, в нашем случае мы ни насколько не продвинулись к пониманию того, как же устроены простые числа. Этот недостаток настолько серьёзно беспокоил многих крупных математиков, что возникли целые течения в математике (в первую очередь, интуиционизм), представители которых считали неправомерными доказательства от противного. А в самом деле, что из того, что я получил противоречие? Это только доказывает, что отрицание утверждения ложно, но отнюдь не то, что утверждение верно. И как тут не вспомнить о том, как Ходжа Насреддин был судьёй. «Ты прав», — сказал он первому из спорящих, которые попросили рассудить их. «Ты прав», — сказал он и второму. Это всё слышала его жена и с удивлением спросили Ходжу: «Как же так, один говорит одно, и ты с ним соглашаешься, второй — прямо противоположное, но ты и ему говоришь, что он прав. Разве так может быть?» — «Ты тоже права», — успокоил её Насреддин. Но, читатель, не бойся — интуиционизм не настолько повлиял на математику: большинство математиков не нашли причин отказываться от такого удобного и важного метода, тем более, что он ещё ни разу не подводил на практике. И не подведёт, если им правильно пользоваться.

Очень поучительно сравнение с методом математической индукции. Имеется очень надёжный и мощный инструмент

5. О противных доказательствах

решения задач индукционного типа, но не поддающихся индукционным рассуждениям (во всяком случае, стандартным). Это — метод минимального контрпримера.

Технически метод выглядит так: «Предположим противное. Тогда существует контрпример к условиям задачи. Рассмотрим минимальный такой контрпример...» Другими словами, мы, во-первых, берём несуществующий объект, а во-вторых, выбираем самый-самый такой объект. Типичное противоречие обычно заключается в том, что удаётся доказать, что вопреки нашему предположению (и нам на радость!) он не самый-самый.

Главных моментов здесь два: первый — правильный выбор понятия минимальный (минимальный в смысле чего — это всегда надо чётко оговорить и убедиться, что он действительно обязан существовать); второй — организовать способ построения по данному объекту ещё меньшего и организовать спуск от первого ко второму (поэтому данный метод, по существу, идентичен методу бесконечного спуска, открытому ещё Ферма).

Рассмотрим теперь конкретную, хорошо известную и довольно трудную задачу.

♣ **Задача.** При дворе короля Артура собралось $2k$ рыцарей, причём каждый из них имеет среди присутствующих не более $k - 1$ врага. Доказать, что Мерлин, советник Артура, может так рассадить рыцарей за круглым столом, что ни один из них не будет сидеть рядом со своим врагом.

Поиск решения. Первая попытка, конечно, индукционная. Поначалу кажется, что она должна сработать. Ну, в самом деле, высадим на время из-за стола двух врагов, оставшихся $2k - 2$ рыцаря по индукционному предположению рассадить можно, а этих как-нибудь втиснем — для каждого из них место, где сидят рядом два его друга, должно найтись.

Увы, это только на первый взгляд. При более тщательном рассмотрении выясняется, что индукционный переход не может быть применим: для того чтобы рассадить $2k - 2$ рыцаря,

5. О противных доказательствах

у каждого из них должно быть не более $k - 2$ врага, а в наших условиях их вполне может оказаться и $k - 1$. Вот так-то!

Это очень неприятный психологический момент. Казалось, что задача вот-вот решится с помощью индукции, но на деле такого-не происходит, она «выскальзывает» из рук, причём даже непонятно, как с этим бороться. Индукция (во всяком случае естественная — по k) не срабатывает. Что же делать?

Попробуем от противного. Тогда, как ни рассаживай, всё равно рядом окажутся враги. Попробуем рассадить их хотя бы максимально благоприятным образом, так, чтобы сидящих рядом враждующих пар оказалось минимальное число. Такая расстановка, очевидно, существует, хотя, конечно, их может быть и несколько — с таким числом пар.

Рассмотрим её. Появилась смутная надежда выйти на решение. Нам нужно попытаться эту расстановку улучшить, т. е. пересадить несколько человек так, чтобы число сидящих рядом враждующих пар уменьшилось. Короче говоря, нам нужно уменьшить минимальный контрпример, что и приведёт нас к желанному противоречию.

Теперь давайте думать, за счёт чего мы можем улучшить расположение. Во-первых, надо рассадить хотя бы одну пару врагов. Во-вторых, надо постараться не приобретать новых, так что желательно общий порядок не слишком ломать. Точнее, надо постараться не ломать никаких других соседств, кроме тех, которые поломаются из-за того, что мы должны будем переселить хотя бы одного из пары врагов.

Тут одно из двух. Либо мы решим, что это попросту невозможно (попробовав простые пересадки одного из двух рядом сидящих врагов), либо (хотя такой ход психологически довольно трудно найти) сообразим, что наиболее благоприятными будут перестройки такого вида, как на рис. 13. Возьмём дугу окружности и пересадим в ней всех в обратном порядке. Тогда соседи поменяются только у двух крайних: у A и у H .

Практически задача уже решена: мы нашли довольно разумный способ улучшать расстановку, и осталось убедиться,

5. О противных доказательствах

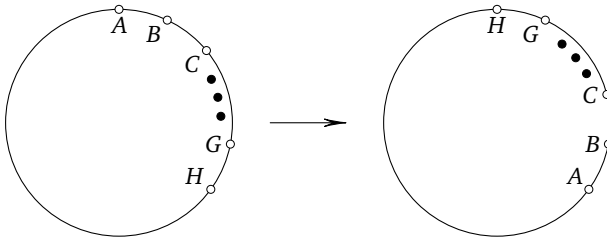


Рис. 13. Перевернём дугу окружности

что условия задачи действительно позволяют сделать это. На всякий случай, мы всё же приведём часть «очищенного» решения.

Рассмотрим пару врагов X, A , сидящих рядом. У X по крайней мере k друзей из оставшихся $2k - 2$ рыцаря. У каждого из этих k друзей рассмотрим следующего, кто сидит за ним по часовой стрелке. Так как их всё-таки больше, чем врагов A , то по крайней мере один из них — друг A . Итак, обязательно найдётся такая пара H, Y , сидящих друг за другом по часовой стрелке, причём H — друг X , а Y — друг A . Перевернув дугу AH , мы уменьшим число враждующих пар (рис. 14). За-

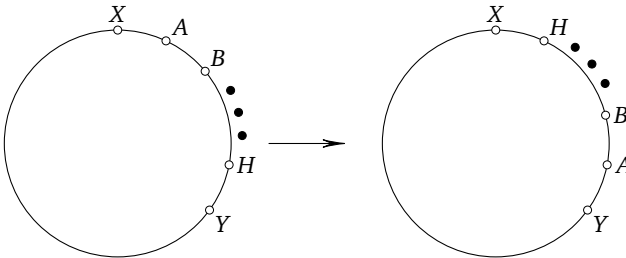


Рис. 14. А кто соседи?

мечательное качество этого решения — его конструктивность (конструкция улучшения применима и к существующим объектам), но, как уже говорилось, это редкое качество для такого подхода.

5. О противных доказательствах

Достоинства метода налицо: там, где не было индукции, мы легко обошлись почти индукционными рассуждениями. Задним числом уже можно было бы сконструировать и индукционное доказательство с индукцией по числу враждующих пар, но с самого начала такую индукцию очень трудно придумать. Да и задним числом непросто — попробуй, читатель!

Есть и ещё одно важное достоинство у метода минимального контрпримера, использованное в данном решении. Дело в том, что мы совсем не обязаны с самого начала задумываться, в каком смысле пример является минимальным. Наоборот, при поиске решения поступают так: берётся минимальный контрпример (минимальный — пока ещё неизвестно, в каком смысле) и анализируется, что можно с ним делать. Нашли какой-то способ преобразования и тут же смотрим: а что при этом уменьшается? Если что-то уменьшается, то вот в этом смысле и будем считать пример минимальным. Единственная забота — убедиться, что такой минимум существует. Например, в нашей задаче он существовал уже потому, что любое множество натуральных чисел обладает минимальным числом. А вот пример ошибочного рассуждения.

❖ Псевдозадача. Доказать, что все целые числа — чётные.

Псевдорешение. Предположим противное. Возьмём тогда минимальный контрпример — минимальное нечётное число. Отнимем от него 2 и получим меньшее нечётное число. Противоречие. В чём ошибка? Не существует минимального. Контрпримеров к условиям задачи много, но не существует минимального.

Ещё одну тонкость читатель должен понять сам, разобрав, почему не проходит то же рассуждение для натуральных чисел (псевдозадача: все натуральные числа — чётные).

Но это, пожалуй, всё тонкости. В целом метод минимального контрпримера трудности не составляет и является одним из самых мощных и надёжных помощников в различных областях математики. Рассмотрим ещё одну достаточно сложную задачу.

5. О противных доказательствах

✦ **Задача.** Доказать, что $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{N}$ — иррациональное число при любом натуральном N .

Поиск решения. Сама формулировка задачи просит начать с индукционных попыток. Начнём с базы индукции. Нужно доказать, что $\sqrt{2}$ — число иррациональное, что было известно ещё древним грекам. Сейчас это доказательство стало считаться стандартным. Проведём его, слегка, впрочем, видоизменив с точки зрения нашего подхода в этой главе.

Пусть, напротив, $\sqrt{2}$ — число рациональное. Тогда его можно записать в виде $\frac{p}{q}$. Так как подобных записей, вообще говоря, может быть несколько (например, $\frac{2p}{2q}$), то выберем среди них минимальную, например, с точки зрения $p + q$. Она у данного рационального числа существует. Тогда имеем

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow p \text{ делится на } 2 \Rightarrow p = 2p' \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2q^2 = 4(p')^2 \Rightarrow q^2 = 2(p')^2 \Rightarrow q \text{ тоже делится на } 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow q = 2q' \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{2p'}{2q'} = \frac{p'}{q'}. \end{aligned}$$

Получили меньшую запись и требуемое противоречие.

Аналогично проводится доказательство иррациональности чисел вида \sqrt{m} , где m — не точный квадрат (упражнение $m = 90$).

Следующий шаг: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. Попробуем сразу возвести в квадрат:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{p}{q} \Rightarrow 5 + 2\sqrt{6} = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow \sqrt{6} \text{ — число рациональное.}$$

Замечательно! Вроде бы индукционный ход уже нащупан. Но на всякий случай ещё один шаг: $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2$ — неинтересно, а вот $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ — это уже настоящая проверка. Ну, а теперь — в квадрат: $4 + 2 + 3 + 5 + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{5} + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}$. Батюшки! Никаким индукционным переходом здесь и «не пах-

5. О противных доказательствах

нет». Да, но что-то искать надо. Может быть, двойку надо было убрать?

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} = \frac{p}{q} - 2 = \frac{p'}{q'}.$$

Но в квадрате опять три корня, и более плохих: $\sqrt{6}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{15}$. Так, а может, оставить опять $\sqrt{2}$ отдельно?

$$\sqrt{2} = \frac{p'}{q'} - \sqrt{3} - \sqrt{5} \Rightarrow 2 = r_1 + r_2\sqrt{3} + r_3\sqrt{5} + 2\sqrt{15},$$

где r_1, r_2, r_3 — рациональны? Выиграли ли мы хоть что-то? Да вроде нет, разве что корни оказались связанными между собой. Попробуем это использовать. Например, так:

$$\sqrt{3}(-2\sqrt{5} - r_2) = r_1 - 2 + r_3\sqrt{5} \Rightarrow 3(r_4 + r_5\sqrt{5}) = r_6 + r_7\sqrt{5}.$$

Теперь, если расписать числа (а раньше времени мы этого не делали, чтобы не затенять идеи), то, несомненно, получится, что $\sqrt{5}$ — рациональное число. Ладно, хоть что-то стало понятно. Постараемся сделать выводы.

Первый вывод. Ясно, что мы решаем не ту задачу. Она плохо сформулирована, слишком частно. Явно, что ведь верен более общий факт. Должно было быть что-то такое: $r_2\sqrt{2} + r_3\sqrt{3} + r_4\sqrt{4} + \dots + r_N\sqrt{N}$ — иррациональное число при любых рациональных числах r_i . Хотя... хотя это не верно. Например, $2\sqrt{2} - \sqrt{8} = 0$. Спокойствие. Эту неприятность надо как-то обойти. Где-то так: избавиться от квадратов под корнем. Сформулируем.

Пусть n_1, \dots, n_m — различные натуральные числа, каждое из которых не делится на квадрат никакого простого числа. Если r_1, r_2, \dots, r_m — какие-то рациональные числа, не все равные нулю, то $r_1\sqrt{n_1} + r_2\sqrt{n_2} + \dots + r_m\sqrt{n_m}$ — число иррациональное. Похоже на правду? Вполне. Быстренькая проверка: а наша исходная задача из этой вытекает? Вроде бы (а почему, о читатель?). Значит, вот это утверждение и будем пытаться доказывать.

Вернёмся к тому доказательству, которое мы уже провели. Индукция вроде бы не прошла, но что-то индукционного типа

5. О противных доказательствах

в рассуждениях промелькнуло. Это верная примета — надо попытаться использовать метод минимального контрпримера. Минимального в смысле чего, пока не ясно. Потом поймём.

Далее, раз уж мы берём контрпример, надо постараться взять пример «со всеми удобствами». Например, было бы удобно, чтобы все r_i были целыми, и этого всегда можно легко добиться, домножив на общий знаменатель. Значит, будем брать минимальный контрпример с целыми коэффициентами.

Так, но что же мы всё-таки использовали в уже проведённом доказательстве? Чем числа $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{15}$ оказались лучше исходных чисел $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$? А-а-а, ясно чем: в них же меньше простых делителей! Прекрасно, значит, берём минимальный контрпример с точки зрения наименьшего количества простых делителей в числах n_1, n_2, \dots, n_m . И тогда вроде бы видно, как действовать дальше: переносим все корни с одним из простых делителей, скажем, p_1 , в левую сторону, а всё остальное — в правую и возводим в квадрат:

$$[\sqrt{p_1}(r_1 + \alpha_1\sqrt{k_1} + \dots + \alpha_s\sqrt{k_s})]^2 = (\beta_1\sqrt{L_1} + \dots + \beta_t\sqrt{L_t} + r)^2.$$

Теперь простых делителей становится меньше, и всё прекрасно. Так мы и поступали выше, перетаскив всё с $\sqrt{3}$ влево. Значит, схема доказательства уже наметилась. Какие возникнут трудности? Вроде бы только одна, причём та же, что и раньше. Непонятно, как после возведения в квадрат мы покажем, что у нас не получится точное равенство, т. е. что не всё сократится. В конкретных случаях, таких как $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$, это просто, и то коэффициенты считать противно, но нам-то нужно что-то общее, универсальное!

Правда, какой-то намёк виден уже в доказательстве при $\sqrt{2}$ — надо работать на делимости. Да, пожалуй, почти наверняка правая часть после возведения в квадрат не будет делиться на p_1 . А если она с самого начала делилась? Тогда... сократим на $\sqrt{p_1}$ и получим меньший контрпример. Значит, наш минимальный контрпример обогатился ещё одним свойством: у него минимальна, скажем, сумма модулей всех входящих

5. О противных доказательствах

в него чисел. (Так как мы имеем дело только с натуральными числами и корнями из них, то и такой существует.) Но это — во-вторых, т. е. мы ищем минимальный контрпример среди всех контрпримеров с минимальным количеством простых делителей.

Итак, считаем, что правая часть на p_1 не делится, и осталось только показать, что и квадрат тоже не будет делиться. Да..., но это не верно. Например, $(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 = 8 + 2\sqrt{15}$, и на 2 всё делится. Хотя... это свойство числа $p = 2$, так как $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, что и объясняет его особую роль. Ну, это ерунда — мы всегда можем выбрать другое бóльшее число. Итак, остаётся доказать лемму.

ЛЕММА. Если все числа m_1, \dots, m_k свободны от квадратов и не делятся на $p > 2$, а среди целых чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ хотя бы одно не делится на p , то в выражении $(\alpha_1\sqrt{m_1} + \dots + \alpha_k\sqrt{m_k})^2$ после раскрытия скобок и приведения подобных найдётся коэффициент при каком-то корне, не делящийся на p .

Доказательство. Опять возьмём минимальный контрпример (местного значения для этой леммы, а не тот, который мы «истязали» в общем доказательстве). Тогда опять можем считать, что все α_i на p не делятся (иначе — отбросим $\alpha_i\sqrt{m_i}$). Пусть все m_i расположены в порядке возрастания. Тогда в квадрате у нас будет выражение $2\alpha_{k-1}\alpha_k\sqrt{m_{k-1}m_k}$. С ним ничто не сократится, так как это — самые старшие корни. Но $\alpha_{k-1}\alpha_k$ на p не делится. Значит, это не контрпример. Лемма доказана.

Теперь ясен общий план доказательства основной теоремы. Лемма гарантирует, что после возведения в квадрат у нас справа будет какой-то корень с коэффициентом, не делящимся на p . Слева таких корней нет, значит, мы не всё сократим после приведения подобных и, следовательно, получим контрпример с меньшим числом простых делителей (хотя, быть может, с большей суммой модулей, но это-то во-вторых!). А это нам и надо. Задача решена.

✦ **УПРАЖНЕНИЕ.** Провести основательную чистку решения. В первую очередь найти ошибку в доказательстве леммы и над-

5. О противных доказательствах

лежащим образом исправить её (что именно — то ли ошибку, то ли лемму?).

✦ **УПРАЖНЕНИЕ.** Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для корней произвольной степени.

Отметим, насколько гибким оказался приём контрпримера. Насколько тесны были бы рамки индукции! Ведь практически всё, что мы делали, мы добавляли к свойствам контрпримера.

Следует также обратить внимание на важный приём обобщения задачи: мы её обобщили, потому что более полно поставленную задачу оказалось легче решить. И часто решающим обстоятельством является именно правильная постановка задачи. В данном случае правильной оказалась постановка в максимальной общности. Причина ясна — рассуждения типа индукционных требуют однородного материала и беспомощны при наличии «дыр».

Вот один простой пример: попробуйте доказать по индукции грубое неравенство

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} < 1000$$

и точное равенство

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Вопреки, казалось бы, здравому смыслу более сильная формулировка доказывается намного легче (по индукции).

И последний момент, о котором хотелось бы всё же сказать. Обратите внимание, как много было проведено черновой работы, прежде чем мы стали доказывать сам факт. Как и в физике, часто для хорошей теории нужен большой предварительный экспериментальный материал. И даже если его много, он не сразу ложится в гладкую и стройную теорию и почти всегда требует последующего уточнения (сколько неверных гипотез было сформулировано!). А решает всё труд.

В заключение — несколько необычных задач для тренировки чувства «противного». Несколько нематематическая природа формулировок делает их не совсем корректными, но зато

5. О противных доказательствах

позволяет «живьём» увидеть суть и границы применимости метода. В качестве компенсации будут даны подсказки, но, право, лучше ими не пользоваться...

Для начала небольшой экскурс в теологию. В старину любили доказывать существование бога. Ради разнообразия поступим наоборот. Как математики, мы должны дать определение. Определим бога самым могущественным способом — как существо, которое может ВСЁ.

❖ **Задача.** Доказать, что бога нет.

Подсказка. А может ли он придумать задачу, которую никто не сможет решить?

Существенно труднее атеистическая задача: что делать, если человек, которому вы с сияющим видом расскажете своё решение, усмехнётся и скажет: «Ну и что? На то он и бог, чтобы сделать даже то, что невозможно сделать!»?

Обратимся теперь к богу менее могущественному, а именно Зевсу. Согласно греческой мифологии он создал собаку, от которой никто не мог убежать, и лисицу, которую никто не мог догнать. Так уж случилось, что в один прекрасный день эта самая собака бросилась в погоню за «недогоняемой» лисицей. Как вы думаете, чем это кончилось? Разрешить что противоречие Зевсу оказалось под силу.

Вместо подсказки: ознакомьтесь с греческой мифологией! Для культурного человека знакомство с нею не менее важно, чем знакомство с теоремой Пифагора.

С парадоксом брадобрёя знакомы многие, но в такой постановке она кое для кого может оказаться сюрпризом.

❖ **Задача.** Один парикмахер как-то заявил, что бреет только тех, кто не может побрить себя сам. Считая это правдой, определите пол брадобрёя.

Подсказка. Если он мужчина, то может ли он себя побрить?

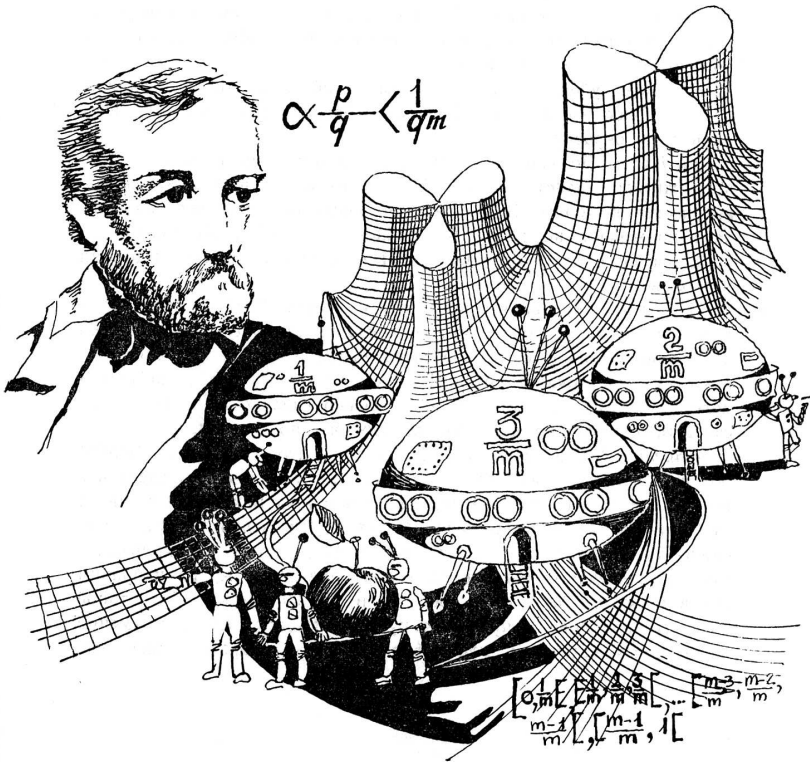
И последняя, совсем уж сомнительная

❖ **Задача.** Доказать, что все числа интересные.

Подсказка. Не правда ли, наименьшее неинтересное число само по себе интересно?



КАК СЧИТАТЬ, ЧТОБЫ НЕ СЧИТАТЬ
(ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ)



6. Как считать, чтобы не считать (принцип Дирихле)

И чтоб не краснеть за себя дураку,
Чтоб каждый был выделен, каждый,
На каждого умного по ярлыку
Навешено было однажды.

Б. Ш. Окуджава

Об этом замечательном принципе, носящем имя Дирихле, написано много, написано понятно и хорошо. Однако, поскольку нельзя сказать, что каждый школьник овладел им в совершенстве, автор надеется, что и его добавление в общий котёл хоть кому-то, но придётся по вкусу.

Наиболее убедительным началом этой темы обычно служит подсчёт волос на голове. Для разнообразия придадим ему инопланетную окраску.

♣ **Задача.** По ещё не полученным данным, на голове у каждого жителя планеты Казанг VI вместо волос растут антенны в количестве не более 100 тысяч. По последней переписи, на планете проживает не менее 8 миллионов жителей. Доказать, что найдётся 80 обитателей Казанга VI с одинаковым числом антенн на голове.

Небольшое предварительное рассуждение. Задача интуитивно ясна: жителей так много, что если сравнивать число волос-антенн на голове у каждого, то обязательно начнутся повторения. Однако как это доказать строго? Как посчитать, чтобы на самом деле не считать? А вот как: надо только сделать вид, что мы их считаем, и мысленно навесить на каждого по ярлыку.

Решение. Представим себе (мысленно), что у нас есть 100 001 большая клетка (раз это инопланетяне, то можно представить все клетки в виде космолётов). На каждой из них напишем число от 0 до 100 000 включительно. А затем (мысленно) начнём рассаживать инопланетян по клеткам в соответствии с ярлыками. Если у очередного жителя на голове две антенны, то направим его в космолёт № 2, если 500 — то в № 500. Лысых, без единой антенны на голове, отправим в нулевую клетку. (Кстати, именно из-за лысых задачу пришлось

6. Как считать, чтобы не считать (принцип Дирихле)

формулировать с привлечением элементов фантастики: для любого восьмимиллионного города Земли аналогичная задача имеет очевидное решение — 80 лысых там всегда найдётся. Но, может быть, на Казанге VI с выпадением антенн научились бороться?)

Что теперь означают условия задачи? Только то, что требуется доказать, что хоть в одном из космолётов сидит не менее 80 человек, точнее, нечеловек. Но это действительно так: если бы в каждой клетке было меньше 80 жителей, то их общее количество не превосходило бы $79 \times 100\,001$, что гораздо меньше восьми миллионов. Задача решена.

Проведённое рассуждение почти дословно можно применить для доказательства следующего, более сухо звучащего факта: *если имеется $kr + 1$ предмет r различных сортов, то найдётся $k + 1$ предмет одного сорта*. Это и есть принцип Дирихле. Докажи его, читатель, для тренировки. Удобно представлять себе даже не формулировку, а само рассуждение. Другими словами, написав «согласно принципу Дирихле существует...», вы как бы сообщаете пароль, благодаря которому вас признают способным доказать упомянутое существование по этой стандартной схеме: «Предположим противное. Тогда предметов каждого сорта не более k и их общее количество не превосходит kr , что ведёт к противоречию». Чаще всего даже не пишут, что такое k или r , если это ясно из контекста.

• ПРИМЕРЫ. Согласно принципу Дирихле:

1. Если в p клетках сидит $p + 1$ кролик, то хотя бы в одной клетке не меньше двух (считается, что с помощью кроликов удобнее всего продемонстрировать этот принцип).

2. Из 11 цифр всегда можно выбрать две одинаковые (не путать цифры с числами).

3. Из 400 учеников школы всегда найдутся два, день рождения у которых одинаковый (хотя год рождения может быть разный). В связи с этой задачей полезно заметить, что даже в одном классе с количеством 30 учеников с вероятностью больше половины найдётся совпадение дней рождения (чита-

6. Как считать, чтобы не считать (принцип Дирихле)

тель может проверить это на практике, а затем попытаться доказать).

4. Из трёх ненулевых чисел всегда найдутся два с одинаковым знаком.

Конечно, в таком явном виде задачи даются редко. Чаще всего требуется самостоятельно определить нужные объекты и нужные классы (сорта) объектов, т. е. навесить ярлыки и сосчитать их. Приведём несколько традиционных примеров, которые читатель, прежде чем читать решение, должен перешать сам.

✦ **Пример 1.** Доказать, что из $k + 1$ числа всегда можно выбрать два, разность которых делится на k .

Поиск решения. Начнём с $k = 2$. Из трёх чисел всегда найдётся два, разность которых делится на два, т. е. число чётное. Но это понятно. Из трёх чисел по принципу Дирихле либо два чётных, либо два нечётных. (У нас два ярлыка на числах: чётные и нечётные.) Их разность, конечно же, будет числом чётным.

Далее, $k = 3$. Есть четыре числа, и требуется убедиться, что найдутся два из них, разность которых делится на 3. Опять, если есть два числа, делящиеся на 3, то всё в порядке, а вот если есть два числа, не делящиеся на 3, то этого мало, например, это могут быть 4 и 5. Так что рассуждение, как в случае $k = 2$, вроде бы не проходит.

Но есть ещё одно дополнительное число. Как оно может помочь? Например, 4, 5 и 8 — хорошо ($8 - 5 = 3$). По 4, 5 и 7 тоже хорошо ($7 - 4$). Значит, оно как-то помогает. За счёт чего? Вернёмся к $k = 2$. Там как-то принцип Дирихле помог. Но там ясно было, как делить числа по сортам: чётные и нечётные. А тут? Делимость на три — это раз. А неделимость слишком много. А может, неделящиеся тоже разбить на два класса (как раз для принципа Дирихле будет четыре числа и три класса)? А что требуется от такого класса? Чтобы разность любых двух чисел этого класса делилась на 3. Ну что ж, попробуем. Например, в одном классе с числом 4 должны и могут быть 7,

6. Как считать, чтобы не считать (принцип Дирихле)



Каждому — своё

10, 13, ... А в классе с 5—8, 11, 14, ... Ну, теперь всё понятно. Берём три класса:

0, 3, 6, 9, 12, ... — первый;

1, 4, 7, 10, ... — второй;

2, 5, 8, 11, ... — третий.

По принципу Дирихле из четырёх чисел хотя бы два «сидят» в одном классе. Всё.

Вроде бы даже понятно, как решать в общем случае для произвольного k . Первый класс составят числа, делящиеся на k : $0, k, 2k, 3k, \dots$, второй — на единицу больше: $1, k + 1, 2k + 1, 3k + 1, \dots$, третий — $2, k + 2, 2k + 2, 3k + 2, \dots$ и так далее. Наконец, последний класс начнётся с $k - 1$: $k - 1, k + k - 1, 2k + k - 1, 3k + k - 1, \dots$ Далее опять по принципу Дирихле.

Чистка решения. Осталось навести строгость и понять, что это за классы. Впрочем, об этом можно быстро догадаться: в одном классе находятся числа с одинаковым остатком при делении на k . Тогда чистое короткое решение будет выглядеть так.

Рассмотрим остатки каждого из чисел при делении на k (ярлыки!). По принципу Дирихле найдётся два одинаковых, так как всего различных остатков k штук: $0, 1, \dots, k - 1$. Разность чисел с одинаковым остатком делится на k .

6. Как считать, чтобы не считать (принцип Дирихле)

✦ ПРИМЕР 2. В ряд выписано несколько целых чисел A_1, A_2, \dots, A_k . Доказать, что найдётся несколько подряд идущих чисел (может быть, одно число), сумма которых делится на k .

Поиск решения. Вроде бы явно «пахнет принципом Дирихле». Как навешивать ярлыки, уже понятно: их, как и в предыдущей задаче, определяют остатки при делении на k . Вопрос только в том, что взять в качестве объектов. На первый взгляд, вроде бы неплохо взять все суммы. Таких сумм мы получим с запасом — гораздо больше, чем $k + 1$. Подозрительно. Ну хорошо, посмотрим, что делать дальше. Допустим, что есть две суммы с одинаковым остатком. Что с ними можно делать? Взять разность? Но это теперь может не быть суммой. Например, уже $A_1 + A_2 - A_3$. Да-а-а... Неприятности! Так вот почему сумм так много. А может, не стоит брать всё сразу? В этом есть какой-то смысл. Надо брать такие суммы, разность которых тоже будет суммой. Например, $A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ и $A_1 + A_2$. Что ещё к этому можно добавить? $A_1 + A_2 + A_3$? Вполне. Ведь A_3 и A_4 тоже считаются суммами. Значит, и A_1 можно безбоязненно добавить. Ну и прекрасно. А теперь уже и нетрудно сконструировать требуемые объекты. Вот они: $A_1, A_1 + A_2, A_1 + A_2 + A_3, \dots, A_1 + A_2 + \dots + A_k$. Если среди них есть две суммы с одинаковым остатком, то их разность и есть нужная нам сумма, делящаяся на k . Значит, всё отлично. По принципу Дирихле найдётся два... Стоп! Что за кошмар! Их же только k , а для принципа Дирихле надо $k + 1$. Где же взять ещё одну сумму? Непонятно. Что ни припишешь — всё плохо. Неужели не пройдёт? Не может быть! Но хоть что-то есть в этом рассуждении? Да. По крайней мере то, что для того, чтобы у нас не получилось, все остатки должны быть разными. Но остатков — k и сумм тоже k , так что это вполне может быть. А может, остатков не k ? Да нет, k . Вот они: $0, 1, 2, \dots, k - 1$. Ой, как же всё просто! Если есть остаток 0 , то сумма, ему соответствующая, будет делиться на k . Вот и всё.

Чистка решения. Если хоть один из остатков при делении на k чисел $A_1, \dots, A_1 + \dots + A_k$ равен нулю, то всё в порядке.

6. Как считать, чтобы не считать (принцип Дирихле)

В противном случае имеем k остатков и $k - 1$ возможность для каждого из чисел. По принципу Дирихле найдутся два равных. Соответствующая разность сумм даст сумму, делящуюся на k .

• ПРИМЕР 3. В волейбольном турнире команды играют друг с другом по одному матчу. За победу даётся одно очко, за поражение — ноль. Известно, что в один из моментов турнира все команды имели разное количество очков. Сколько очков набрала в конце турнира предпоследняя команда и как она сыграла с победителем?

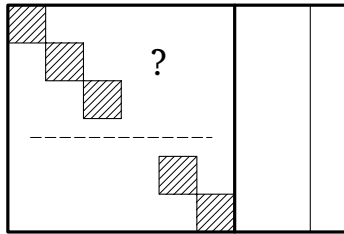


Таблица чемпионата

Поиск решения. На первый взгляд, условия задачи почти ничего общего не имеют с вопросом, который в ней ставится. Это наводит на мысль о том, что условие на самом деле гораздо сильнее, чем кажется в первый момент. Видимо, ситуация, когда все команды имеют разное количество очков, встречается настолько редко, что по ней уже можно восстановить все остальные данные. Что же в таком случае бывает часто? Часто хотя бы две команды, но имеют одинаковое количество очков. Такая постановка вопроса явно требует принципа Дирихле. А не поступить ли так: попробовать «доказать», что в любой момент времени есть две команды с одинаковым количеством очков. Где-то такое «доказательство» должно «сломаться». Надо отчётливо исследовать этот момент, тут-то и должна проясниться ситуация.

Итак, принцип Дирихле. Вроде бы, всё понятно. У каждой команды считаем число очков. Это и будет её ярлыком. Тре-

6. Как считать, чтобы не считать (принцип Дирихле)

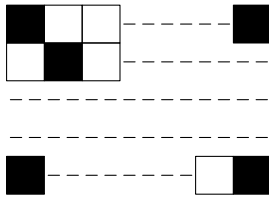
буется, доказать, что найдётся две команды одного «сорта». Посчитаем, сколько команд и сколько сортов. Команд, скажем, k . А сортов тогда... тоже k : от 0 до $k - 1$ очков может набрать каждая команда, так как сама с собой она играть не будет. Для принципа Дирихле чуть-чуть не хватает. Вот если бы сократить на один сорт, тогда был бы $k - 1$ сорт и принцип Дирихле бы сработал. Значит, так как принцип Дирихле применить нельзя, то ни один сорт не сокращается, и это означает, что есть команды всех сортов. Другими словами, есть команда, которая набрала ноль очков, команда, которая набрала одно, и так далее. В частности, есть команда, которая набрала $k - 1$ очко. Так, кое-что проясняется. Например, то, что команда, которая набрала $k - 1$ очко, попросту у всех выиграла, иначе как она набрала свои очки. Тем самым ответ на один из вопросов ясен: предпоследняя команда первой проиграла (если, конечно, в турнире больше двух команд и предпоследняя команда — это не то же самое, что и первая). Займёмся вопросом о количестве очков предпоследней. К сожалению, ничего не ясно о моменте времени, когда у всех было разное количество очков. Достоверно только, что в этот момент победитель уже сыграл все партии. А что, если... исключить чемпиона из турнира и его матчи аннулировать? Тогда... тогда можно будет применить индукцию! Команд-то станет меньше. Практически всё. Чистка решения и осознание того, что момент в условиях задачи имел место только после окончания турнира, предоставляется читателю.

Мы же сделаем несколько замечаний, касающихся других глав. Во-первых, отметим, какой важной оказалась работа по разделению случаев и насколько разные идеи использовались в каждом из них: если никто не набрал определённого количества очков — принцип Дирихле, если любой набор кем-то получен — индукция. Основная нагрузка легла на принцип Дирихле, индукция же помогла справиться с частностями. Это довольно обычная ситуация: общий случай исследуется с помощью принципа Дирихле, а частные требуют особого раз-

6. Как считать, чтобы не считать (принцип Дирихле)

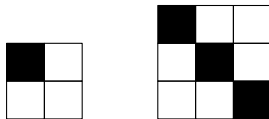
бора. Разумеется, задач на принцип Дирихле в чистом виде мало. Гораздо чаще он используется как вспомогательный приём, как чёткое выражение той мысли, что если в нескольких местах чего-то много, то должно быть много и в одном из них. Рассмотрим такую задачу.

• Задача. Бесконечная клетчатая доска раскрашена в несколько цветов (каждая клеточка — в один из цветов). Доказать, что найдутся четыре клеточки одного цвета, расположенные в вершинах прямоугольника со сторонами, параллельными стороне одной клеточки.



Угловые клеточки одного цвета

Поиск решения. Смысл задачи в общем-то ясен: какого-то цвета так много, что наберётся и прямоугольник одного цвета. Принципиальный вопрос: по существу ли бесконечность, или же просто можно ограничиться квадратной доской достаточно большого размера, зависящего от числа красок? Ответ на этот вопрос легко получить, анализируя случай малого числа красок. Постараемся решить задачу для случая двух красок, а потом, если получится, смоделировать соответствующую конечную задачу. Значит, так: квадратик 2×2 можно



Квадраты маленьких размеров

6. Как считать, чтобы не считать (принцип Дирихле)

закрасить без прямоугольников. Квадратик 3×3 ? Что-то сразу непонятно! Так, если по диагонали поставить один цвет, а остальные шесть клеточек закрасить другим, то прямоугольников не будет. Ничего себе! Если случай 3×3 такой нетривиальный, то что же ждёт нас дальше? Квадрат 4×4 что-то уже не кажется легко поддающимся. Да, совсем нелегко то, что казалось лёгким поначалу. Что же делать? Перебирать случай 4×4 ? Но там уже довольно хлопотно. Тогда сделаем так: ещё немного подумаем, а если никакой идеи не появится, займёмся этим перебором. Какая же должна быть отправная точка размышлений? Конечно же, исходная задача. Случай двух красок мы выделили правильно, хотя он оказался более нетривиальным, чем можно было предположить заранее, по сравнению с исходной задачей. Что мы сделали дальше? Стали решать конечную задачу. Это верно. Но откуда взялся квадрат, тем более, что в условиях его нигде не было? Психологически это понятно — квадрат вещь удобная, а главное, привычная. Значит, любовь к привычкам и подвела. Итак попробуем решать задачу на прямоугольнике. Начнём. Прямоугольник $1 \times k$, конечно же, нет даже смысла рассматривать. Рассмотрим прямоугольник $2 \times k$. Его тоже, конечно, можно закрасить без прямоугольников одного цвета. Например, так: одну полосу и белый цвет, а вторую $1 \times k$ — в чёрный (пора уже как-то назвать наши цвета). Ещё есть способы? Ну конечно, в шахматном порядке, хотя бы.

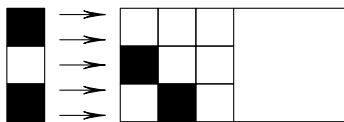


Рис. 15. Что происходит при приклеивании?

Случай $3 \times k$. Это уже принципиальней. Правда, 3×3 мы закрасивать умеем. Теперь естественная попытка — приклеивать сбоку по три клеточки (рис. 15). Так, это уже хорошая

6. Как считать, чтобы не считать (принцип Дирихле)

идея! Можно поставить перед собой чёткий вопрос: а когда к прямоугольнику $3 \times k$, раскрашенному без прямоугольников, можно приклеить ещё три клеточки так, чтобы получился прямоугольник $3 \times (k + 1)$ без одноцветных прямоугольников? Лучше, пожалуй, решать обратный вопрос: а в каких случаях приклейка этих трёх клеточек всё портит? Допустим, что они все белые. Тогда одноцветные прямоугольники появились бы в том случае, если бы уже была полоска из трёх клеток, две из которых — белые. Здорово! А если приклеиваемая полоска состоит из двух белых и одной чёрной клеточки? Тогда она испортит картинку хотя бы в том случае, когда уже есть точно такая же полоска. О, есть идея: а что, если доказать, что для достаточно большого k всегда есть две одинаково раскрашенные полоски. Но это же явный принцип Дирихле! Можно даже точно указать число k . Действительно, одну полоску размером 1×3 можно закрасить в два цвета восемью различными способами (для каждой клеточки две возможности, всего — 2^3). Значит, уже прямоугольник 9×3 гарантирует существование нужного одноцветного прямоугольника: по принципу Дирихле найдутся две одинаковые полоски, а на каждой из них — по две клеточки одного цвета, которые составят требуемый прямоугольник.

Мы слишком много внимания уделили поиску решения. Так, впрочем, и бывает на самом деле. А теперь приведём очищенное решение.

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим бесконечную полосу шириной $k + 1$, а на ней — полоски размером $1 \times (k + 1)$. Так как таких полосок различных окрасок только конечное число, то найдутся две одинаково раскрашенные полоски. По принципу Дирихле на одной полоске есть две одинаково закрасненные клеточки. Они вместе с такими же клеточками на второй полоске и дадут требуемый прямоугольник.

КОММЕНТАРИИ. Стоило ли так долго решать такую простую задачу? Вне всякого сомнения! Автор должен сознаться, что, придумав эту задачу, он нашёл совершенно другое реше-

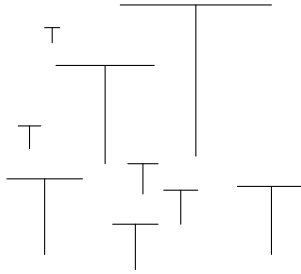
6. Как считать, чтобы не считать (принцип Дирихле)

ние. Идея его была такова: если взять одну полосу шириной 1, то на ней найдётся бесконечное количество клеток одного цвета. Для определённости будем считать, что полоса вертикальная, а клеточки белые. Вычеркнем тогда все горизонтальные полосы, содержащие не закрашенные белым цветом клетки. В результате получим задачу, ничем не отличающуюся от исходной, кроме одного — на плоскости есть одна полоса одного цвета. Затем то же самое можно сделать со следующей вертикальной полосой и так далее, пока не получим $k + 1$ полосу. Понятно, что основная идея — в вычёркивании строк. Это не портит, а улучшает задачу (т. е. если мы умеем решать «вычеркнутые» задачи, то получаем и решение исходной). Автор надеялся, что естественный путь поиска решения выведет его на идею вычёркивания. Однако, следуя своим собственным рекомендациям, вышел на вышеприведённое, по-видимому, более естественное решение.

Следующий комментарий касается бесконечной вариации принципа Дирихле: если имеется конечное число классов, а элементов — бесконечно много, то в одном из классов бесконечно много элементов. Сказанное понятно, когда сформулировано, но не всегда приходит в голову, когда об этом надо догадаться по ходу решения задачи. Этим принципом мы воспользовались дважды: в решении и в предыдущем комментарии (найдите эти места). Для тех, кто знаком с элементами теории меры и умеет различать бесконечности (в школе этому, правда, не учат), отметим ещё одну вариацию принципа Дирихле: если «континуум кроликов» (почему-то чаще всего принцип Дирихле демонстрируют именно на кроликах) разбросать по счётному числу ящиков, то в одном из них окажется «континуум кроликов». Придумайте сами задачу на эту тему. Если не можете, то решите такую.

♣ **Задача.** Можно ли буквами T замостить плоскость? (Предполагается, что буква T — это два отрезка, один из которых расположен вертикально, а второй — горизонтально, и его середина есть начало вертикального отрезка. Отрезки имеют

6. Как считать, чтобы не считать (принцип Дирихле)



Можно ли заселить плоскость буквами T ?

одинаковую длину, но буквы T могут быть разного размера. Конечно же, предполагается, что буквы не пересекаются, но требуется, чтобы через каждую точку плоскости проходила ровно одна буква.) Для простоты рассмотрите вначале случай букв одинакового размера.

Несколько задач для всех. Первая простая: докажите, что уже квадрат 5×5 нельзя раскрасить без одноцветных прямоугольников двумя красками. Что можно сказать о прямоугольнике 4×6 ?

Помочь может и идея вычёркивания. Теперь — сложная.

❖ Задача. Бесконечная клетчатая доска раскрашена в несколько цветов (каждая клеточка — в один цвет). Верно ли, что найдутся четыре клеточки одного цвета, лежащие в вершинах квадрата со сторонами, параллельными сторонам одной клеточки?

Эта задача трудная даже для двух красок. Помочь в её решении может красивая и очень сложная

ТЕОРЕМА ВАН-ДЕР-ВАРДЕНА. Если множество натуральных чисел разбито на две части, то в одной из этих частей найдутся арифметические прогрессии сколь угодно большой длины.

На самом деле верен гораздо более сильный, но более сухо звучащий результат, носящий такое же название:

ТЕОРЕМА ВАН-ДЕР-ВАРДЕНА. Для любых натуральных чисел k и l существует такое натуральное число n , зави-

6. Как считать, чтобы не считать (принцип Дирихле)

сящее от k и l , $n = n(k, l)$, что при разбиении любого отрезка ряда натуральных чисел длины n любым способом на k классов (среди которых могут быть и пустые), по крайней мере в одном из этих классов найдётся арифметическая прогрессия длины l .

С доказательством этой и не только этой теоремы можно ознакомиться в небольшой, но очень содержательной и приятно читающейся книге А. Я. Хинчина «Три жемчужины теории чисел». Несколько применений теоремы Ван-дер-Вардена можно найти в журнале «Квант» и на более высоком уровне изложения — в книге Р. Грэхема «Начала теории Рамсея».

Чтобы оценить нетривиальность теоремы и лучше почувствовать, что именно в ней доказывается, читатель должен хотя бы познакомиться с формулировкой следующей задачи.

♣ **Задача.** Разбить натуральный ряд на две части, ни одна из которых не содержит бесконечной арифметической прогрессии.

Решение её несложно, хотя его идея далека от темы данной главы. Гораздо ближе к ней следующая

♣ **Задача.** Существует ли 1987 подряд идущих составных чисел?

Но и эту задачу мы оставим читателю. Коснёмся иных интерпретаций принципа Дирихле.

♣ **Задача.** Доказать, что в любом выпуклом шестиугольнике найдётся диагональ, которая отсекает от него треугольник площадью, не большей, чем одна шестая площади шестиугольника.

Поиск решения. В воздухе явно носятся идеи типа принципа Дирихле наоборот: если чего-то мало, то в одном из мест недостаточно. У нас шесть диагоналей, отсекающих треугольники. Если бы все эти треугольники не пересекались — всё было бы прекрасно: одна из частей была бы не больше одной шестой (сформулируйте утверждение, из которого это вытекает, по аналогии с принципом Дирихле). Но, увы, треугольники пересекаются. Хорошо бы как-то заменить каждый треуголь-

6. Как считать, чтобы не считать (принцип Дирихле)

ник на что-то без самопересечений. А главное — такая замена не должна менять площади. Но как это сделать, не видно.

А что, если подойти к задаче с обратной стороны: рассмотреть разные способы, как можно разбить шестиугольник на шесть частей, а уже потом придумывать, можно ли эти части как-то связать с нашими треугольниками? Видимо, разумно потребовать некоторой симметрии, иначе слишком много способов разбиения. Правда, симметрия не обязательно должна быть полной: например, три части могут быть одного типа, а три — другого, но это пока неважно. Как же придумать хоть какой-то способ? Вот один: взять какую-то точку внутри шестиугольника и соединить её с вершинами. Получим шесть

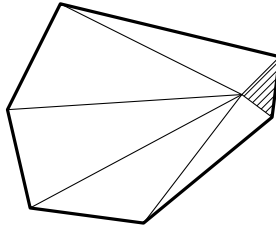


Рис. 16. Первая попытка найти треугольники

треугольников (см. рис. 16). Площадь хотя бы одного из них не больше $1/6$. Это хорошо. Но как связать этот треугольник с одним из требуемых? Недолгий анализ показывает, что никак, если мы возьмём просто любую точку: можно получить и одну миллионную, если точку брать слишком близко к одной из сторон, а это не для наших треугольников, значит, если идти таким путём, то точку нужно брать удачную, желательно где-то в центре. Но какую же особенную точку можно разыскать в шестиугольнике, причём в произвольном? Если бы в нём хотя бы главные диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекались в одной точке, то эту точку и можно было взять. А что, так и сделаем: будем решать пока более частную задачу, когда главные диагонали пересекаются

6. Как считать, чтобы не считать (принцип Дирихле)

в одной точке. Если решим её, то, возможно, хоть какую-то идею найдём, а если не решим, то и общую не решим.

Итак, пусть диагонали пересекаются в одной точке. Образуется шесть треугольников, и площадь одного из них не больше $1/6$, предположим, что того, который выделен на рис. 17.

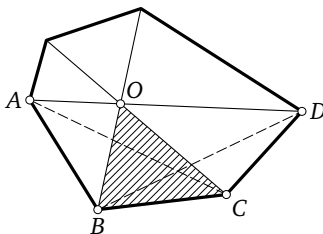


Рис. 17. Главные диагонали пересеклись в одной точке

Как-то надо суметь связать его с нашими треугольниками. Понятно, что имеет смысл сравнивать его только с ближайшими соседями: треугольниками ABC и DBC . Можно ли надеяться, что площадь одного из них не больше площади треугольника BOC ? Очень даже похоже. Значит, попробуем это доказать. Как вообще можно сравнивать между собой площади разных треугольников? Площадь — это полупроизведение основания на высоту. Да, но основание у всех трёх треугольников общее, значит, всё решают высоты: где высота меньше, там и площадь меньше! Прекрасно, но это же совершенно понятно: так как точка O лежит между A и D , то либо из точки A , либо из D высота будет не больше (интуитивно это и доказательства не требует, а на этапе чистки решения мы в этом наверняка удостоверимся). Значит, всё доказано. Ещё раз проверим: площадь одного из треугольников, проведённых из точки O , не больше $1/6$, например, у треугольника BOC . А площадь BOC заключена между площадями ABC и DBC , так как это верно для высот. Значит, площадь одного из этих двух треугольников не больше $1/6$. Теперь мы можем попробовать решать общую задачу, когда диагонали не обязательно пересекаются

6. Как считать, чтобы не считать (принцип Дирихле)

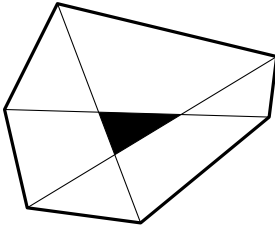


Рис. 18. Пересечения в одной точке не получилось

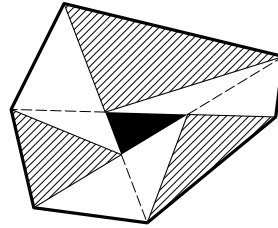


Рис. 19. Нужные треугольники найдены

в одной точке. Рисуем картинку (см. рис. 18). Внутри образовался треугольничек. Как это замостить? А может, и не надо? В самом деле, нам и не нужно, чтобы шесть вспомогательных треугольников, которые мы построим, покрывали весь шестиугольник: если не покроют, будет ещё лучше. А зачем нам вообще треугольники? Понятно зачем: они нам помогут прийти к нашим. Но сейчас у нас только три треугольника. Да и те, вроде, не такие, какие нужно, а меньше. А какие нужны? Нужны такие, чтобы мы смогли ещё раз провести рассуждение с высотами, как в предыдущем доказательстве, т. е. чтобы основанием служила сторона шестиугольника, а вершина лежала на главной диагонали. Имеются ли такие треугольники и такое разбиение? Да, имеются. После сравнительно небольшого раздумья читатель и сам бы его нашёл, но, на всякий случай, мы приведём его на последнем рисунке к нашей задаче (рис. 19). Дальнейшее уже понятно и предоставляется читателю.

Проведём анализ решения. Формулировка геометрической интерпретации принципа Дирихле особого внимания не заслуживает (читатель вполне способен сам проинтерпретировать кроликов геометрически). Лучше мы отметим, как именно мы его использовали: он указал нам путь поисков, так как по формулировке задачи чувствовалось, что без него здесь не обойтись. Особо следует сказать о пути решения, который мы выбирали как в этой, так и в предыдущей задаче. В этих двух

6. Как считать, чтобы не считать (принцип Дирихле)

задачах (да и не только в них!) чётко сработал следующий важнейший принцип:

НЕ МОЖЕШЬ РЕШИТЬ ЗАДАЧУ — УПРОСТИ ЕЁ!

Решение всякого рода частных случаев — это основное для активного поиска идей, с одной стороны, и для вчувствования в задачу — с другой. А если упрощённая задача тоже не решается? Ещё упростить. И так до тех пор, пока что-то не решится, причём хоть чуть-чуть, но нетривиально. А затем попробовать вернуться назад. Быть может, это уже будет легче, может, мы уже обогатимся за это время новыми идеями и, по крайней мере, будем представлять себе, хоть на что похоже то, что мы ищем. Сравните, насколько труднее было бы искать заключительный чертёж в последней задаче с самого начала. И даже имея его, но не имея в запасе идеи про высоты, решение можно было бы прозевать. А теперь вспомните, что главная трудность в задаче с красками оказалась на уровне двух красок и прямоугольника 3×9 . Опять же, как уже было сказано, переход от частного к общему проще, чем наоборот (не одна диссертация была успешно защищена благодаря человеческой способности обобщать!).

Вернёмся к последней задаче. Анализируя её решение, нетрудно составить новую.

❖ **Задача.** Доказать, что если каждая диагональ выпуклого шестиугольника отсекает от него не меньше одной шестой площади, то большие диагонали шестиугольника пересекаются в одной точке, делясь в одинаковом отношении, и параллельны сторонам шестиугольника.

Вот примерно как придумываются задачи. Решается какая-то известная задача. Решение анализируется, выясняется, что из него ещё можно извлечь, задача переформулируется, и через некоторое время уже не остаётся ничего общего ни от исходной задачи, ни, как ни странно, от её решения, так как оно всё совершенствуется, совершенствуется... Приведём ещё один пример геометрической задачи.

6. Как считать, чтобы не считать (принцип Дирихле)

♣ **Задача.** На планете Тау Кита суша покрывает более половины общей площади планеты. Докажите, что таукитяне могут вырыть шахту, соединяющую сушу с сушей и проходящую через центр планеты.

Поиск решения. Опять же принципом Дирихле «пахнет» с самого начала. Но вот только как до него дотянуться? Ясно, что суши много, и на этом надо сыграть. Далее, когда можно прорыть туннель? Когда обе точки, симметричные относительно центра, лежат на суше, и, собственно, требуется доказать существование двух таких точек. Но как это сделать? У нас только один участок суши. Вот если бы их было хотя бы два, тогда уже можно было бы что-то сделать, пользуясь идеями принципа Дирихле. А что, если... самим сделать второй участок? Но как и где? И какой? Какой, пожалуй, ясно: площади больше половины, и тогда по принципу Дирихле эти два участка пересекутся и... должна появиться шахта. Подумаем: итак, у нас есть общая точка для двух разных участков. Какой должна быть эта точка, чтобы по ней можно было бы спроектировать туннель через центр? «По ней», скорее всего, должно означать «через неё»: одна точка точно лежит на суше, тогда другая из второй, нами построенной, области должна быть такой, чтобы противоположная точка тоже лежала на суше. Но теперь понятно, как строить вторую область: надо просто взять нашу исходную область суши и симметрично относительно центра её отразить. Тогда и получим всё, что нужно: две области пересекутся. Их общая точка пересечения и берётся за основу туннеля: и сама точка — на суше, и ей противоположная тоже (по построению второй области).

Вот такие идеи, как симметрия, проектирование, разного рода переносы, очень хорошо сочетаются с идеями принципа Дирихле. То же относится к поворотам и вообще всяческим углам, что демонстрирует следующая известная

♣ **Задача.** На каждой стороне произвольного четырёхугольника как на диаметре построена окружность. Доказать, что

6. Как считать, чтобы не считать (принцип Дирихле)

четыре построенных круга полностью покроют четырёхугольник.

Поиск решения. Формулировка задачи непривычна, так что мы прежде всего должны её понять. Понять нужно, собственно, только одно: как выразить то, что данный круг накрыл данную точку. Сформулируем яснее. Итак, есть отрезок. На нём как на диаметре построен круг. Можно ли дать ясный критерий, когда точка попадёт внутрь круга? Сразу не видно. Ну хорошо, а когда она лежит на краю круга, на окружности? Ну, это известно. Когда... вписанный угол прямой. Вроде так. Ну а тогда есть вполне правдоподобная рабочая гипотеза: точка покрывается кругом, когда вписанный угол тупой. Какой такой вписанный угол? Что за несурязица? Сконцентрируемся. Теперь всё ясно. Соединим нашу точку (назовём её, скажем, M) с концами A и B отрезка. Для того чтобы точка оказалась на окружности, угол AMB должен быть прямым, чтобы она оказалась снаружи круга — острым, а чтобы внутри — тупым (рис. 20). Вот теперь исследование окончено

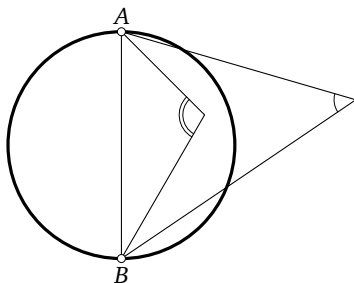


Рис. 20. Как накрыть точку кругом?

полностью. Можем вернуться к исходной задаче. Переформулируем её. Значит, требуется накрыть каждую точку. Вот и докажем, что каждую точку кто-нибудь да накроет. Пусть точку зовут M , а четырёхугольник — $ABCD$. Соединим M с вершинами. Если угол AMB будет тупой, то круг от AB накроет M . Аналогично для других отрезков. Вывод: надо доказать, что

6. Как считать, чтобы не считать (принцип Дирихле)

есть тупой угол. А сколько углов у нас? Четыре. И их сумма — 360° (рис. 21). Вот и отлично. По принципу Дирихле, хоть один

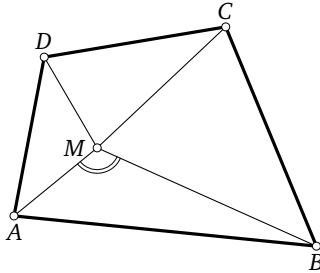


Рис. 21. Один из четырёх углов не меньше 90°

из них — тупой. Хотя нет, тупой или прямой, ну, всё равно, не меньше 90° , а это нам и нужно.

Довольно часто принцип Дирихле применяют для задач на делимость, часто — комбинируя с методом остатков, о котором мы поговорим в другой главе. В соответствующей главе мы поговорим также о задачах, связанных с теорией графов, где принцип Дирихле — один из наиболее надёжных помощников. А закончим мы эту главу числовой задачей.

♣ **Задача.** Доказать, что из $k + 1$ числа, меньшего $2k$, всегда можно выбрать два, отношение которых — степень числа 2.

Поиск решения. Понятно, что задача — про принцип Дирихле, но не ясно ещё, к чему применять этот принцип. Постараемся проанализировать, что от нас хотят. Чтобы никакие два числа при делении друг на друга не давали степень двойки — мы должны доказать, что такого не получится. Но предположим, что мы всё же решились построить контрпример. Как мы это станем делать? Возьмём какое-нибудь число первым. Что к нему можно добавить? Так, абстрактно, неясно. Возьмём какой-либо числовой, конкретный пример, допустим, 12. Что ещё можно добавить? Нет, даже лучше такой вопрос: чего добавлять нельзя? Нельзя, конечно, добавлять 3, 6. А 9 можно. Нельзя 12, не рекомендуется 24, 48 и так

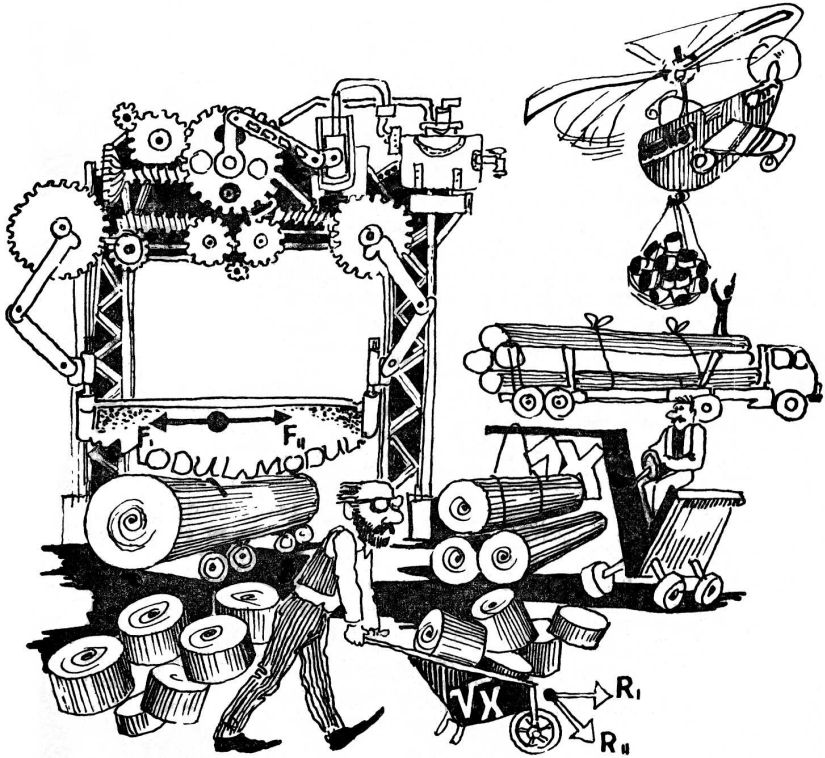
6. Как считать, чтобы не считать (принцип Дирихле)

далее. Выпишем в ряд: 3, 6, 12, 24, 48. Всё ясно — геометрическая прогрессия. Значит, каждое число запрещает появляться остальным числам из той же прогрессии. Минуточку, а что значит той же? Как по данному числу построить его прогрессию? Надо взять все числа, частное от деления на которые — степень двойки (может быть, отрицательная). Если немного поразмышлять, то становится совсем понятным: у каждого числа есть его «корень», который получится, если разделить это число на максимальную степень двойки. Например, у 12 — «корень» тройка, а у 8 — единица. «Корень» у 5 и 40 одинаковый — это число пять.

Теперь можно вернуться к нашей задаче. Уже ясно, что если два числа имеют общий корень, то их отношение — степень двойки. Кроме того, корень — это число нечётное. Нечётных чисел, меньших $2k$, ровно k штук. Значит, по принципу Дирихле, найдутся два числа с одинаковым корнем.

Идея «корня» как основы для сравнения очень часто помогает в решении задач. «Смотри в корень», как говаривал Козьма Прутков. Одна из них, в которой читателю рекомендуется отыскать «корень» самостоятельно, приведена в конце книги. Принцип Дирихле в ней не играет никакой роли.

ОСТАТКИ ОСТАТКОВ



7. Остатки остатков

Но прежде всего Нума разделил год — в соответствии с движением луны — на двенадцать месяцев, а так как тридцати дней в лунном месяце нет и лунному году недостаёт одиннадцати дней до полного, образуемого кругооборотом солнца, вставляя добавочные месяцы, он рассчитал время так, чтобы на каждый двадцатый год любой день приходился на то же самое положение солнца, что и в исходном году, а совокупная продолжительность всех двадцати лет по числу дней была полной.

Тит Ливий. История от основания Рима

Цель этой короткой главы — убедить в необходимости работы с остатками. Вначале — приметы метода:

В ЗАДАЧАХ ПРО ДЕЛИМОСТЬ — ПЕРЕХОДИ К ОСТАТКАМ.

На самом деле это бывает полезно и не только в задачах про делимость, точнее, в тех задачах, где нужно предварительно догадаться, что это — задача на делимость.

❖ **Задача.** Докажите, что число, записываемое 1985 единицами, 1985 двойками и 1985 нулями, не является кубом натурального числа (порядок цифр несуществен).

Решение. В таких задачах надёжный приём — изучать остатки при делении на 3 или на 9. В данном случае предпочтительнее девятка. Каков остаток от деления на 9 нашего числа? Очень просто это выяснить — надо всего лишь взять сумму цифр и её остаток (если даже читатель не знал этого факта, то с его доказательством он познакомится ниже). Остаток в нашем случае, как несложно посчитать, равен 6, т. е. число делится на 3, но не делится на 9 и, стало быть, кубом быть не может. Это был краткий набросок решения, которое должно стать очевидным после внимательного прочтения данной главы.

Теперь — о технике работы с остатками. Прежде всего — как их обозначать. Самый удобный способ — чертой сверху. Другими словами, когда у какого-то числа появилась «над головой» черта, значит, мы смотрим не на число, а на его остаток. Например, если мы изучаем остатки при делении на 3,

7. Остатки остатков

то правомочна запись $\overline{4} = \overline{1}$, так что дважды два с чертой — это один с чертой ($\overline{2} \times \overline{2} = \overline{1}$). Изредка будет применяться и такая запись, как $a \equiv b \pmod{c}$, которая читается так: числа a и b сравнимы по модулю c . А означает эта запись следующее: $(a - b)$ делится на c или, что то же самое, a и b имеют одинаковый остаток при делении на c . Отметим, что в большинстве книг такая запись — основная. Иногда и слово mod опускают.

Наконец, главное — арифметика остатков подчинена обычным правилам сложения и умножения, с единственным добавлением: если результат стал слишком большим, надо переходить к остаткам. Словом, работаем с остатками: от того, что получается, опять берём остатки, проделав что-то с ними, — опять остатки и так далее.

♣ **Задача.** Доказать, что при любом неотрицательном K число $5^{2K+1} \cdot 2^{K+2} + 3^{K+2} \cdot 2^{2K+1}$ делится на 19.

Посмотрите, как быстро и эффективно решается эта задача одной лишь расстановкой чёрточек.

Решение. Имеем

$$\overline{5^{2K+1}} = \overline{5^{2K} \cdot 5} = \overline{25^K \cdot 5} = \overline{6^K \cdot 5}.$$

(В последнем равенстве, как и требовалось по методу, мы сразу перешли к остатку, записав 5 вместо 25.) Точно так же $\overline{2^{K+2}} = \overline{2^K \cdot 4}$; $\overline{3^{K+2}} = \overline{3^K \cdot 9}$; $\overline{2^{2K+1}} = \overline{4^K \cdot 2}$. Подставим всё это и произведём очевидные преобразования:

$$\overline{6^K \cdot 5 \cdot 2^K \cdot 4} + \overline{3^K \cdot 9 \cdot 4^K \cdot 2} = \overline{12^K \cdot 20} + \overline{12^K \cdot 18}.$$

Как только получили большое число 20, немедленно заменяем его на остаток: $\overline{12^K \cdot 1} + \overline{12^K \cdot 18} = \overline{12^K \cdot 19}$. Но $\overline{19} = \overline{0}$, так что мы получили, что остаток нашего исходного числа при делении на 19 равен нулю.

Ещё несколько простых примеров.

♣ **Задача.** Доказать, что число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.

Решение. Стандартный метод в решении задач про цифры — представление данного числа с записью $ABC\dots$ (k цифр)

7. Остатки остатков

в виде $A \cdot 10^{k-1} + B \cdot 10^{k-2} + \dots$. Если мы ищем остаток данного числа при делении на 9, то попросту «навешиваем» черту:

$$\overline{A \cdot 10^{k-1} + B \cdot 10^{k-2} + \dots} = \overline{A \cdot 1^{k-1} + B \cdot 1^{k-2} + \dots} = \overline{A+B} + \dots,$$

откуда видно, что само число имеет тот же остаток при делении на 9, что и сумма его цифр.

В качестве упражнения читателю предлагается самостоятельно установить признак делимости на 11. Вот пример олимпиадной задачи.

♣ **Задача.** У числа 2^{1985} вычислили сумму цифр; у полученного числа снова вычисляем сумму цифр и так далее до тех пор, пока мы не получим однозначное число. Какое число получится?

Поиск решения. Непонятно, как подойти к задаче — не считать же, в самом деле, сумму цифр у исходного числа. А как действовать? Какой-то неприятный всё-таки процесс. Кстати, для таких случаев есть совет — искать инвариант (см. главу об инвариантах). А что им здесь может быть? Сумма цифр? Так она меняется, и вообще её-то и нужно найти. Но что-то есть знакомое в этой последовательности действий. Когда-то зачем-то мы её применяли. Ну конечно же — признак делимости на 9: там суммировали цифры, и, если получалось большое число, у него опять суммировали цифры. Так это... как раз то, что нам нужно! Остаток при делении на 9 не меняется — он и есть нужный нам инвариант и, конечно же, та цифра, которая получится в конце. Дело за малым — вычислить этот остаток. Начнём не торопясь: $2^1 \equiv 2 \pmod{9}$, $2^2 \equiv 4 \pmod{9}$, $2^3 \equiv 8 \pmod{9}$, $2^4 \equiv 7 \pmod{9}$. Последнее понятно, так как остаток 16 при делении на 9 будет 7. А вот дальше — очень полезное замечание: уже нет необходимости вычислять 2^5 , достаточно просто остаток от 2^4 , т. е. 7, умножить на 2 и, конечно же, опять взять остаток. Получим 14 и 5 соответственно. Итак, $2^5 \equiv 5 \pmod{9}$. Точно так же $2^6 \equiv 1 \pmod{9}$, $2^7 \equiv 2 \pmod{9}$, $2^8 \equiv 4 \pmod{9}$. Так, явно начали повторяться. Значит, наша последовательность остатков пойдёт периодически, с перио-

дом 6. Теперь уже нетрудно вычислить остаток 1985-й степени. Какой остаток у 1985 при делении на 6? $1985 \equiv 5 \pmod{6}$. Значит, остаток при делении на 9 числа 2^{1985} тот же, что и у 2^5 , т. е. 5. Это и есть ответ.

Обратим внимание на то, что по ходу дела пришлось использовать сравнения по разным модулям, из-за чего мы отказались от обозначения с помощью черты. Ещё раз подчеркнем: надо стремиться работать только с остатками. Мы, конечно же, могли посчитать 2^5 , но уже 2^{50} считать, а потом делить на 9 было бы неприятно. Работа же на остатках от этой неприятности нас избавила. Отметим ещё один важный момент: неторопливый анализ последовательности остатков. Так как их мало, то, например, в задачах про последовательности и процессы за поведением остатков можно иногда уследить. Поэтому они часто служат надёжным инвариантом.

Про остатки и делимость существует много разных полезных теорем (часть из них приведена в конце книги в виде задач). Но одна из них особенно удобна. Её зовут

КИТАЙСКАЯ ТЕОРЕМА ОБ ОСТАТКАХ. Пусть m_1, m_2, \dots, m_n — попарно взаимно простые числа (т. е. никакие два из них не имеют общего делителя). Пусть a_1, a_2, \dots, a_n — произвольный набор целых чисел. Тогда существует такое число a , что $a \equiv a_i \pmod{m_i}$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Например, заведомо существует число, имеющее остаток 5 при делении на 7, остаток 4 при делении на 13 и остаток 1987 при делении на 10 001. Попробуйте его, однако, найти!

Доказательство теоремы предлагаем найти самому читателю (в голове ли, в учебнике по теории чисел — его дело).

Ещё один объект приложения метода остатков — целочисленные арифметические прогрессии.

✦ **ЗАДАЧА.** Пересечение двух возрастающих целочисленных арифметических прогрессий с взаимно простыми разностями — арифметическая прогрессия.

Идея решения основана на простом наблюдении: такая прогрессия получается пересечением двух множеств: перво-

7. Остатки остатков

го, состоящего из чисел, имеющих одинаковый остаток при делении на разность (тот же, что и у первого члена), и второго, состоящего из всех чисел, больших некоторого фиксированного числа (например, первого члена, уменьшенного на единицу). Пересечение двух множеств второго типа есть множество такого же типа. Но при условии взаимной простоты аналогичное утверждение справедливо и для множеств первого типа — достаточно удачно применить китайскую теорему об остатках, и это станет ясным.

Теперь читатель без труда ответит и на следующий вопрос — можно ли натуральный ряд представить в виде объединений арифметических прогрессий с попарно взаимно простыми разностями, бóльшими единицы?

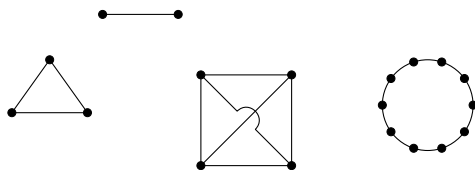
И последний совет — в олимпиадных задачах не забывайте об остатках при делении на 2, т. е. о чётности и нечётности. Мы постараемся привести такие задачи в других главах.

8. Их сиятельство граф

Как можно без содрогания помыслить о бедствиях, которые способна причинить хотя бы одна опасная связь!

Шодерло де Лакло. Опасные связи

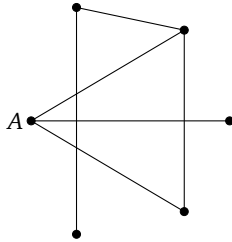
Мы начинаем главу об одном из самых гордых (по названию) обитателей математического аквариума — о графе. Под этим красивым и благозвучным словом скрывается удивительно простое и понятное определение. Граф — это всего-навсего несколько точек, часть из которых друг с другом соединены (не обязательно отрезками, можно просто линиями или же вообще ничем, лишь бы они считались соединёнными). Точки называются вершинами, соединяющие линии — рёбрами графа. Например, на любой треугольник мы можем смотреть как на граф, у которого три вершины и три ребра. Отрезок — это граф с двумя вершинами и одним ребром. Возьмём квадрат и проведём в нём две диагонали, причём не будем обращать внимания на точку пересечения диагоналей, как бы считая, что они не пересекаются. Тогда получим граф с четырьмя вершинами и шестью рёбрами. Если на окружности нарисуем девять точек, получим граф с девятью вершинами и девятью рёбрами, которыми будут служить дуги окружности. Две изолированные точки — это тоже граф с двумя вершинами и без рёбер. Ещё приятнее строить граф в пространстве: там всегда можно добиться того, чтобы соединяющие линии не пересекались (в пространстве больше места).



Примеры графов

✦ **Задача.** Доказать, что из шести любых людей найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

8. Их сиятельство граф



К задаче о знакомствах

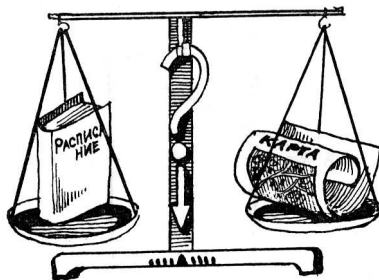
Поиск решения. Самая главная неприятность в задаче — слишком «нематематическая» постановка вопроса. Что значит «знакомы»? Как это строго записать, какой формулой? А может, и не формулой вовсе, а геометрически? А что, если граф поможет? Надо как-то попробовать поставить в соответствие задаче граф, тогда она, по крайней мере, станет «виднее». Значит, так. Берём шесть точек (по точке на каждого человека) — это вершины. А рёбра будем строить так: если люди знакомы между собой, то и точки соединим. Не знакомы — не соединяем. Хорошо! Как же теперь выглядит наша задача в такой интерпретации? А вот как: в любом графе с шестью вершинами найдутся либо три попарно соединённые вершины (по существу, треугольник, хотя, быть может, с кривыми сторонами), либо три попарно не соединённые вершины. Чисто геометрически это довольно ясно: если линий много, то должен быть треугольник, а если мало, то должны появиться три не связанные между собой вершины. Попробуем это как-то более тщательно обосновать. Допустим, что линий много. Например, что из одной вершины их выходит более половины возможного. Всего возможно пять, так как остальных вершин осталось пять, а более половины — это три. Итак, пусть из одной вершины выходит три ребра. Рассмотрим вершины, лежащие на другом конце этих рёбер. Если какие-то две из них соединены, то и получаем треугольник вместе с двумя рёбрами, соединяющими их с исходной вершиной. Значит, они не

8. Их сиятельство граф

соединены и... всё что надо получено — нашли три вершины, попарно не соединённые. С этим случаем разобрались.

Случай, когда рёбер меньше, мы оставим читателю. Заметим только, что этот случай совершенно аналогичен уже рассмотренному. Маленькая подсказка в форме вопроса: что мы получили бы вышеприведённым доказательством, если бы строили граф наоборот, соединяя те вершины, которые соответствуют незнакомым людям? (Такой граф, кстати сказать, называют дополнительным к исходному.)

Что же выяснилось из этого решения? Мы поняли, где и зачем нужен граф. Граф приходит на помощь тогда, когда имеются какое-то множество и связи между его элементами. При этом характер связей несуществен, а важен только один вопрос: есть связь или её нет. Именно эту ситуацию и отражает адекватно граф. Преимущества такого подхода понятны: мы можем привлечь неплохо развитую у человека геометрическую интуицию, мы можем что-то *увидеть*, а значит, лучше оценить. Чтобы лучше пояснить, за счёт чего достигается этот выигрыш, представим себе такую ситуацию. Нужно проложить интересный маршрут на самолёте. Вам предлагают две возможности: либо несколько листков бумаги с описанием транспортных схем для каждого из городов выбранной вами страны (а, как известно, воздушное сообщение есть не везде),



Читать или смотреть?

8. Их сиятельство граф

либо ту же информацию в виде одной схемы — графа с 300 точками, где рёбра означают возможность прямого сообщения. Что вы выберете? Прикиньте, что даже если в каждом городе только 30 различных рейсов, то уже при этом условии вам придётся прочитать не менее девяти тысяч названий рейсов. А увидеть то же вы сможете за минуту-другую, если не меньше, особенно если схема будет хорошо сделана. Кстати, это ещё одно преимущество графов: их, в отличие от абстрактных множеств, можно, не изменяя сущности, удобно перерисовывать. Ещё хуже абстрактных множеств какие-нибудь вполне конкретные социологические факторы типа образования, наличия телевизора в семье и уровня зарплаты, когда по большому количеству анкет и опросов социологи пытаются понять, связаны они между собой или нет, и если да, то что можно объединить в одну группу признаков, а что — в разные. Без графов в подобных задачах, учитывая их большой объём, можно утонуть. При слишком большом объёме наглядность, правда, теряется. Но в этом случае выручают ЭВМ.

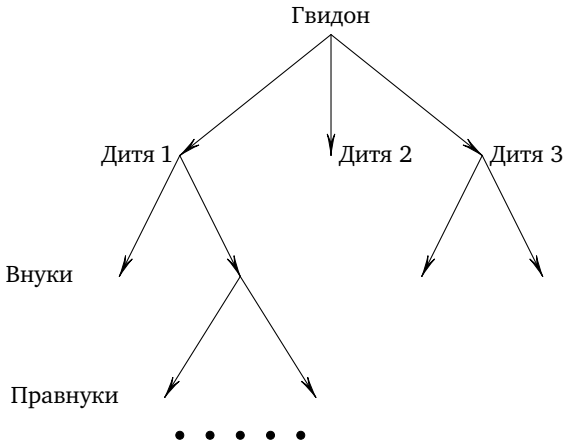
Тем не менее, следует признаться, что в большинстве книг даётся абстрактное и негеометрическое определение графа как некоторого множества вершин и некоторого множества пар этих вершин, называемых рёбрами. Если это и оправдано в тех случаях, когда книга пишется для специалистов и её цель — изложение тонких аспектов этой теории, ибо абстрактное определение удобнее для теоретической работы, то рядовой читатель, чтобы суметь пользоваться теорией графов, должен их всё-таки видеть геометрически. Главное — не обращать внимания на случайно возникающие точки пересечения рёбер, которые не следует считать вершинами — потому-то и удобнее изображать граф в пространстве. (Существуют и много графов, которые даже нельзя изобразить на плоскости без пересечения их рёбер не в вершинах.)

Нашей целью, однако, является не изложение теории графов (о ней написано много хороших книг, начиная с книг

8. Их сиятельство граф

О. Оре), а тренировка умения увидеть «графскую» сущность в совершенно рядовых, на первый взгляд, задачах.

✦ Задача. У царя Гвидона было три сына. Из его потомков сто имело по два сына, а остальные умерли бездетными. Сколько потомков было у царя Гвидона?



Генеалогическое дерево Гвидонов

Поиск решения. Как взяться за задачу — сразу непонятно. Даже в самом начале могут быть совершенно различные ситуации: может, у всех детей Гвидона по два сына, а может — только у одного, а двое — бездетные. Тем не менее, ответ, судя по всему, в любом случае один. Значит, это отражение какого-то общего результата. Только вот о чём, не о детях же? Поищем какую-то общезначимую переформулировку этой задачи. Надо как-то суметь перевести отношение отец-сын, указать на их связь. Связь! А нельзя ли всё это изобразить графом? Отчего же: каждому человеку (включая самого Гвидона) построим вершину, но соединять будем только пары вершин отец-сын. Вот и отлично. Теперь перевод. Имеется граф с каким-то числом вершин. Известно, что из одной из них выходит три ребра, а из каждой другой либо два, либо ни

8. Их сиятельство граф

одного... Ерунда получается: как же может быть ни одного, если он чей-то сын. А, понятно, каждый из них может быть или не быть отцом, но сыном он точно является, кроме Гвидона, конечно. Значит, одно или три ребра. Ну тогда и Гвидон под это подходит. Итак, с самого начала. Имеется граф с каким-то числом вершин. Известно, что из каждой вершины выходит либо три ребра (таких вершин 101, включая Гвидона), либо ровно одно. Требуется сосчитать число вершин. Правильно ли мы перевели задачу? Равносильна ли она исходной? Что-то подозрительно. Что, значит, любой граф с тремя и одним ребром у вершин отражает какую-нибудь родственную связь? Сомнительно что-то. Попробуем перебрать простейшие случаи графов. Вот, например, тетраэдр. Там в каждой вершине по три ребра. Допустим, что вершина — это Гвидон, три вершины снизу — его сыновья. Что же это получается — каждый из них отец другого? Но это ерунда. Что-то мы недоговорили про свойства нашего графа. Что же именно? А, вот что мы упустили — у каждого потомка есть как бы свой этаж: первое поколение, второе поколение, третье и так далее. Значит, мы должны рисовать этикие многоступенчатые графы. Но это неудобно и не очень общо получается. А что, если рисовать стрелку на каждом графе от отца к сыну? (Читатель, мы подошли к важному определению. Граф, у которого каждое ребро имеет направление, называется *ориентированным*. Разумеется, в случае ориентированного графа между двумя вершинами могут быть два ребра: туда и обратно.) Тогда мы получим ориентированный граф. И следующий перевод. Имеется ориентированный граф с некоторым числом вершин. Известно, что из одной фиксированной вершины выходят три ребра и ни одно не входит. В каждую из оставшихся вершин входит ровно по одному ребру, а выходит либо два, либо ни одного, причём два ровно у ста штук. Требуется найти число вершин в графе.

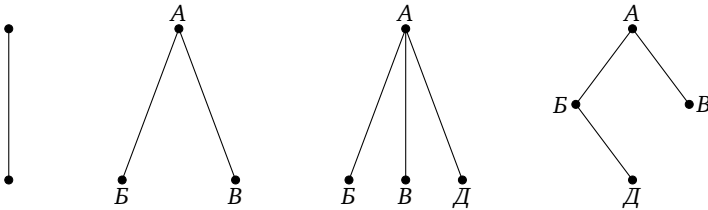
Вот теперь понятно, что перевод адекватен. Что же можно сказать о новой задаче? Что в ней можно вычислить? Во-первых — число рёбер. Их столько же, сколько и начал. А сколько

8. Их сиятельство граф

начал, мы знаем: три — у царя и два, умноженное на сто, у потомков. Итого — 203. Интересно, а что получится, если считать число рёбер по концам? Тогда... тогда это будет в точности число потомков: ведь в каждого из них входит ровно по одному ребру, а в царя ни одного. Вывод: у царя 203 потомка.

Ориентированные графы возникают в совершенно различных ситуациях. Типичный пример: автодороги, где, учитывая наличие улиц с односторонним движением, приходится рассматривать именно ориентированные графы. Следующая задача вводит другой важный класс графов, для которого по ходу решения мы докажем одну важную теорему.

♣ **Задача.** Имеется 100 городов, между некоторыми из них проложены дороги с двусторонним движением. Известно, что из любого города можно попасть в любой другой, причём по единственному маршруту. Сколько имеется дорог?



Маленькие деревья

Поиск решения. Понятно, что число 100 тут ни при чём. Попробуем построить такие транспортные магистрали вначале для маленького числа городов (двух-четырёх), а уж затем попытаемся угадать общий ответ для произвольного числа городов. Для случая двух городов только одна возможность — соединить города между собой, для трёх — ответ тоже ясен: два ребра из трёх возможных должны быть, а третье — отсутствует (иначе будет два разных маршрута). Да,... интересное замечание: треугольника не может быть и в общем случае по тем же причинам. Значит, граф, отвечающий нашей магистрали, в своём составе не имеет никаких треугольников (напомним,

8. Их сиятельство граф

что с точки зрения теории графов треугольник с кривыми сторонами ничем не отличается от треугольников с прямыми — лишь бы стороны были). Ладно, с этим понятно. Теперь случай четырёх городов. Как бы поудобнее перебрать возможные ситуации? Пожалуй, лучше всего так. Наверняка есть хоть один город, из которого выходят не менее двух дорог. (Читатель легко сообразит, почему, нарисовав несколько картинок. Да и вообще ему в этой главе рекомендуется рисовать их побольше.) Итак, допустим, что из города А есть дорога в город Б и есть дорога в город В. Между прочим, тогда Б и В между собой не соединены — получился бы злополучный треугольник. (Да, кстати о треугольниках: любовный треугольник — это типичный случай ориентированного графа!) Остался город Д. Тут возможны три ситуации: Д соединён с А, Б или с В. Случаи Б и В совершенно симметричны, так что можно рассматривать только один из них. А вот случай с А от них коренным образом отличается. Нетрудно видеть, что больше рёбер быть не может: получится либо треугольник, либо квадрат (а квадрат тоже не подходит: тогда будет два разных маршрута из одного города в другой).

Анализ маленьких случаев мы уже окончили. Попробуем сделать определённые выводы. Первый — в нашем графе нет циклов, т. е. замкнутых маршрутов. Внимание, читатель, мы добрались до важнейшего определения: связный граф без циклов называется деревом. Связный означает, что граф нельзя разбить на два, не разрывая его в какой-нибудь вершине. Происхождение слова понятно, если нарисовать несколько больших деревьев: явно видны структуры веток. Вывод второй: судя по результатам малой проверки, число рёбер на единицу меньше числа вершин. Прикинем, как это можно было бы доказать. Наиболее приемлемый путь — индукция (или метод минимального контрпримера). Чтобы применить то или другое, надо постараться отыскать способ уменьшить число вершин. Тогда число рёбер тоже должно уменьшиться на единицу и, самое главное, обязательно должно сохранить-

8. Их сиятельство граф

ся условие задачи. Следовательно, должна найтись вершина, из которой выходит ровно одно ребро. Надежда на это есть, поскольку сказанное верно для малых случаев и так как оно соответствует естественному доказательству. Итак, путь ясен: все силы надо устремить на доказательство следующей полезной леммы.

ЛЕММА. В любом дереве есть вершина, из которой выходит ровно одно ребро (по естественным причинам такую вершину называют висячей).

Поиск доказательства леммы. Естественно попробовать от противного. Допустим, что из каждой вершины выходит не менее двух рёбер. Это означает, что мы всегда можем прийти в эту вершину по одной дороге, а уйти по другой. Начнём «гулять». Так как вершин — конечное число, а в соответствии с задачей мы рассматриваем конечное дерево, то рано или поздно попадём в ту вершину, в которой уже бывали однажды. Но это означает наличие замкнутого маршрута, цикла! Противоречие. Лемма доказана.

Вернёмся к исходной задаче. Итак, мы нашли вершину с одной дорогой из неё. Выбросили и её, и дорогу — получили меньший граф, для которого всё уже можем считать доказанным, например, по индукции. Там уже вершин на одну больше, чем рёбер. Значит, и у нас так. Всё. Замечаний к решению — два. Первое — в виде вопроса.

♣ **Задача.** Верна ли лемма для бесконечного дерева?

Второе замечание касается нашего способа обращения с числом 100, данным в исходной постановке вопроса, которое мы сразу заменили на произвольное число. Что мы выиграли от этого? Получили возможность индукционного рассуждения, во-первых, и анализа маленьких ситуаций, во-вторых. Вывод: не решайте задачи с большими конкретными числами. Другое дело, что не всегда вместо конкретного числа можно взять любое, но почти всегда — бесконечный набор однотипно устроенных чисел. Так, например, если в условиях задачи появилось число 1987, то это — надёжный признак одного из

8. Их сиятельство граф

двух: либо надо решать задачу с произвольным k , либо использовать какие-то свойства делимости, т. е. по существу решая задачу для произвольного k , на что-то там делящегося. Исключения бывают, но редкие.

Приведём классический пример задачи.

♣ **Задача.** На шахматной доске 3×3 стоят по углам снизу два чёрных коня, сверху — два белых (рис. 22). За какое наименьшее количество ходов белых и чёрных коней можно поменять местами?

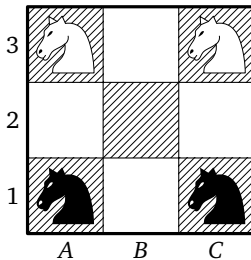


Рис. 22. Как поменять коней местами?

Поиск решения. Сравнительно быстро можно указать одного из нескольких возможных кандидатов на кратчайшую перегруппировку кавалерии. Но вот как можно было бы доказать, что не может быть ничего короче. Это — вопрос вопросов. Попытаемся проанализировать схему коммуникаций. Каждая клетка связана ровно с двумя другими. Связана... А ведь связь — это слово «графское». Не пора ли припомнить теорию графов? Попробуем. Рассмотрим граф с семью вершинами, каждая из которых отвечает одной из клеточек на краю доски (центральную клетку не будем рассматривать: в неё всё равно не попасть). И нарисуем граф связей. Ой, какой красивый граф получается: окружность и на ней восемь точек (рис. 23). Значит, наши ходы конём с этой точки зрения — сдвиг по дуге окружности. А вот в такой интерпретации совершенно ясно, как убедиться, что выбранный способ пе-

8. Их сиятельство граф

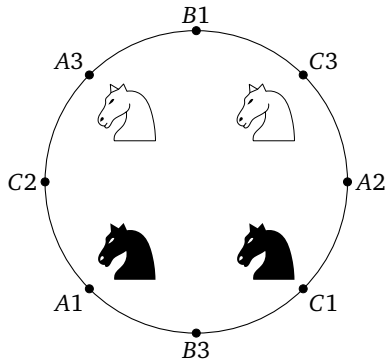


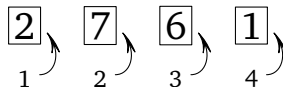
Рис. 23. Кони бегают по кругу

регруппировки минимальный (как, читатель, действительно ясно?).

Метод, который мы сейчас привели, по существу есть метод нити и пуговиц, состоящий в следующем: пришить пуговицы, стоящие на клеточках, друг к другу нитками в соответствии со связями. Затем всю эту комбинацию приподнять и распутать, что мы и проделали.

В следующей, неожиданно трудной, задаче (решение всё время норовит ускользнуть, хотя кажется, что вот-вот его поймаешь) теорию графов на первый взгляд использовать не придётся.

♣ **Задача.** Пронумеровали, начиная с единицы, бесконечное количество карточек. На лицевой стороне каждой из них написали натуральное число, не равное номеру карточки. Доказать, что можно так выбрать бесконечное количество карточек, что на лицевой их стороне не будет написан ни один из



Вот числа выстроились в ряд...

8. Их сиятельство граф

их номеров (другими словами, множество чисел, написанных с одной стороны, не будет пересекаться с множеством чисел, написанных с другой).

Поиск решения. Странная какая-то задача! Утверждение почти очевидно, а доказательство всё время из рук выскользывает. Казалось бы, начни с любой карточки и постепенно добавляй по одной, так нет же, не выходит. Например, стоит только взять первую карточку (с единицей на обратной стороне), и вполне может выясниться, что больше брать ничего нельзя: у всех остальных карточек на лицевой стороне может стоять единица. Из этой ситуации, правда, можно выбраться, но это чересчур уж крайний случай. Вполне может оказаться, что первые пять карточек взять удастся, а шестую — никак. А главное, неудобная какая-то задача: нет привычных объектов, всё какие-то карточки, которыми трудно оперировать, особенно если их бесконечное число. Как бы по-другому записать связь между ними? Связь? Так это значит, что можно обратиться за помощью к теории графов! Как? А очень просто. Вершинами будут натуральные числа, а рёбрами... карточки! Точнее, если есть карточка с номером, скажем, K , на лицевой стороне которой написано число X , то мы проводим ребро-стрелку из K в X . Граф, стало быть, получится ориентированным. Попробуем начать его рисовать. Берём точку 1, проводим из неё стрелку в..., скажем, K_1 . Хорошо. Из K_1 проводим стрелку в K_2 , из K_2 — в K_3 и так далее (см. рис. 24). Глядя на эту картинку, уже легко придумать требуемое: надо только взять карточки через одну: с номерами 1, K_2 , K_4 , K_6 и так далее.

Всё? Здравый смысл подсказывает, что как-то слишком уж легко расправились мы со своими проблемами, наверня-

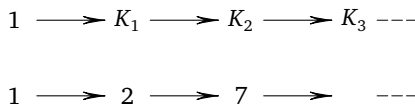


Рис. 24. Бесконечная цепочка

8. Их сиятельство граф

ка где-то ошибка. Вот, например, исходная трудность, когда у всех карточек с лицевой стороны написана единица (кроме первой карточки, конечно). Как работает наш метод в этом случае? А... никак! Уже $K_2 = 1$, и мы никакого бесконечного множества не получили. Да и понятно, в чём дело: вместо длинной цепочки мы получили «свёрнутую» картинку (рис. 25).



Рис. 25. Зациклились

А-а-а, теперь-то и стал понятен источник всех наших затруднений: нам необходимо рассматривать два случая, и каждый из них по-разному. С одним случаем всё вроде бы понятно: если в нашем графе есть бесконечная длинная цепочка типа той, которая изображена на рис. 24, то, беря номера через один, мы получаем требуемое бесконечное множество, ибо номера, которые мы пропустили, соответствуют в точности обратным сторонам карточек. Второй принципиальный случай — такой бесконечной цепи в нашем распоряжении нет. Тогда есть бесконечно много непересекающихся «колечек» — циклов, как на рис. 26 (рис. 25 — его частный случай). О них

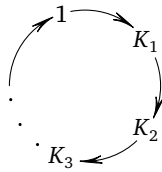


Рис. 26. Колечко

нужно поразмышлять отдельно. Впрочем, и размышлять нечего: берём ровно по одному номеру из каждого «колечка» и получаем требуемое множество. Как убедиться? А как, собственно говоря, сейчас формулируется наша задача на «графском» языке?

8. Их сиятельство граф

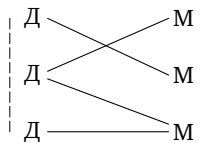
Вот как: найти бесконечное множество вершин таких, что каждая стрелка, начинающаяся в одной из вершин этого множества, оканчивается в вершине, не принадлежащей этому множеству.

Поскольку все концы стрелок мы в наше множество не допустили, то требуемого добились.

Комментарий. В этой задаче хотелось бы обратить внимание на типичную ситуацию, возникающую при решении математических задач, когда обязательно нужно рассматривать два случая: общий, для которого проходит какое-то общее доказательство, и частный, со своим собственным доказательством. А если такого разделения не делать, то общее единое доказательство провести практически невозможно. Например, эту же задачу можно было бы и по-другому разделить на два случая: когда каждое число написано с обратной стороны только конечное число раз и когда есть число, написанное бесконечное число раз (во втором случае требуемое множество — все эти карточки). Главный признак необходимости такого разделения — «ускользание доказательства» из-за каких-то частных возможностей.

Как граф помогает считать, показывает следующая

♣ **Задача.** В пионерском лагере каждый мальчик знаком с 10 девочками, а каждая девочка — с 10 мальчиками. Доказать, что мальчиков и девочек в лагере одинаковое число.



Девочки и мальчики

Решение. Поиск решения состоит только в том, чтобы догадаться нарисовать граф. А задачи про знакомства просто по своей постановке просят графа. Так вот, предположим, что граф уже нарисован. Вершины — девочки и мальчики, рёбра —

знакомства, т. е. соединяем мальчика и девочку ребром тогда и только тогда, когда они знакомы. Граф неориентированный, так как если мальчик знаком с какой-то девочкой, то и, наоборот, девочка знакома с этим мальчиком. Теперь единственный вопрос: сколько получится рёбер? У каждого мальчика по 10 знакомых, значит, количество рёбер равно количеству мальчиков, умноженному на 10. Точно так же количество рёбер равно количеству девочек, умноженному на 10. Но количество рёбер всегда одинаково, как ни считай. Получаем, что десятикратное количество мальчиков равно десятикратному количеству девочек, а следовательно, тех и других поровну.

Особенно часто в задачах с «графской сущностью» эксплуатируются идеи чётности. Поясним это на двух примерах.

♣ **Задача.** В некотором царстве, в некотором государстве царь, возненавидев чётные числа, издал приказ: в государстве должно быть нечётное число городов, а из каждого города должно выходить нечётное число дорог (каждая дорога соединяет два города). Днями и ночами трудились архитекторы над планом строительства дорог и городов. На что только ни шли они: и проводили из одного города в другой несколько дорог, и даже дороги из одного города — в этот же самый, но всё равно у них ничего не получалось. И доложили царю, что архитекторы не могут исполнить волю его величества. Страшно разгневался царь и приказал казнить нерадивых слуг. Но тут на колени упал придворный математик и воскликнул: «О, повелитель, выслушай меня! Твой архитектор невиновен, ибо...» Что же объяснил математик царю?

Поиск решения. Что сказал математик, догадаться несложно. Он доказал, что построить такое государство невозможно. Или, переведя на язык графов, он доказал, что не существует графа с нечётным числом вершин, в котором из каждой вершины выходит нечётное число рёбер. Но вот как он это доказал? Поупражнявшись в попытках проектирования плана для пяти городов, из каждого из которых выходит по три дороги, и убедившись, что ничего не получается, надо пере-

8. Их сиятельство граф

ходить к поиску доказательства. Хорошо бы сформулировать положительное, а не отрицательное утверждение. Например, такое: если в городе (графе) — нечётное число рёбер в каждой вершине, то число вершин — чётно. Утверждение такого плана можно было бы доказывать и по индукции. Как это можно осуществить? Надо попытаться сохранить условия индукционного перехода. Значит, удобно выбрасывать по два ребра и вести индукцию по числу рёбер. Но можно ли выкинуть несколько рёбер так, чтобы из каждой вершины ушло чётное число рёбер, желательно по два или ни одного? Это удалось бы, если бы был треугольник: его рёбра можно было бы выкинуть, и индукционный переход был бы совершён. А если нет треугольника? Тогда есть цикл, и это тоже хорошо. А если нет цикла? Тогда мы имеем дело с деревом. А для дерева доказывать проще. Ну что ж, какой-то разумный план доказательства есть.

Мы отметим для себя эту очень важную схему доказательств. Сначала утверждение доказывается для деревьев. Затем — для произвольного графа индукцией по числу рёбер. Если есть цикл, то обычно его можно выбросить и осуществить индукционный переход. Если цикла нет, то есть дерево, для которого уже всё доказано. Правда, может оказаться, что деревьев несколько, если нет условия связности графа. Но и этот случай чаще всего легко обрабатываем. Главное для применимости данного метода — выбрасывание цикла должно позволять сохранить предположение индукции.

Чистка решения. Конечно, схема хорошая, но какая-то искусственная. Есть и ещё один недостаток — утверждение слишком необщее. Не попробовать ли сформулировать более общее утверждение, справедливое для произвольного графа? А почему бы нет? Например, так. Назовём вершину нечётной, если из неё выходит нечётное число рёбер. Вполне правдоподобная гипотеза: число нечётных вершин чётно. Это опять же можно доказывать тем же способом. Да, но здесь нет необходимости выбрасывать по два ребра. Можно и одно. Что же

8. Их сиятельство граф

тогда происходит? Выбрасывая одно ребро, мы выбрасываем его сразу из двух вершин, и если, например, обе они были нечётными, то станут чётными, а если одна чётная и одна нечётная, то... ну понятно, в любом случае общая чётность не изменится. Стоп, а что значит общая чётность? Это, скорее всего, намёк на то, что никакой индукции вообще не нужно, и сыграть надо на том, что одно ребро считается дважды. Считается дважды? Вот и посчитаем общее число рёбер. Вершин — нечётное число, и сами они нечётные в нашей задаче, а чтобы посчитать число рёбер, надо сосчитать число рёбер в каждой вершине и... разделить на два (ведь каждую вершину мы считаем дважды) — но общее нечётное число на два ведь не делится!

Чистое решение. Докажем более общее утверждение. В любом государстве число городов с нечётным числом дорог чётно (по-прежнему предполагается, что каждая дорога, начавшись в одном из городов государства, оканчивается в каком-то другом городе, а если в том же — «петля», — то считается дважды). Для этого определим общее число дорог, вычислив количество дорог в каждом городе, сложив все эти числа и разделив пополам (так как каждую дорогу мы считали дважды: в начале и в конце). Чтобы общее число дорог получилось целым, результат суммирования должен оказаться чётным. Значит, городов с нечётным числом дорог — чётное число.

Отметим, что царю удалось впоследствии решить все проблемы. Он открыл одну международную трассу, которая начиналась в государстве, а оканчивалась за его пределами...

Комментарии. В этой задаче возник новый тип графа — допускались петли и кратные рёбра (из одного города в другой могло вести несколько дорог). Обычно его называют псевдографом. Если допустить ещё и ориентацию рёбер, то мы получим самый общий вид графов из тех, что мы уже рассмотрели. Следует также обратить внимание на то, как изменились структура и основная идея доказательства в процессе чистки

8. Их сиятельство граф

(правда, это тот случай, когда ясность от сказанного только выиграла).

Дойдя до темы чётности, невозможно упустить следующую замечательную теорему.

ТЕОРЕМА. Граф можно обойти, пройдя по каждому ребру ровно один раз, только в том случае, если нечётных вершин у него не больше двух и он связан. При этом если нечётных вершин две, то маршрут обязан начаться в одной из них, а закончиться в другой; если же ни одной, то маршрут может начаться в любой вершине и в ней же закончиться.

Доказательство. Здесь два утверждения. Первое: если граф такой, то его можно обойти. И второе: если граф можно обойти, то он такой-то. Второе утверждение доказывается совсем просто за счёт следующего простого наблюдения: если вершина находится в середине маршрута (т. е. не начальная и не конечная), то в неё надо войти и из неё надо выйти. Значит, каждый проход через неё добавляет по два пройденных ребра. Так как все рёбра должны быть пройдены, то их у вершины должно быть чётное число. Таким образом, нечётной может оказаться только первая или последняя вершина (а на самом деле «и» вместо «или»).

Несколько сложнее со вторым утверждением. Самый чёткий путь — индукция по числу рёбер. Удобно доказывать всё утверждение в целом. База индукции проблем не представляет. Значит, самое важное — отыскать индукционный шаг. Рассмотрим вначале случай всех чётных вершин. Выбросим одно ребро. По индукции, получившийся граф обойти можно. (Единственная проблема — связность: надо позаботиться о том, чтобы при выбрасывании ребра граф остался связным. Переложим эту заботу на читателя.) Причём маршрут начнётся в одной вершине, а закончится в другой, так как у графа будут две нечётные вершины. Но эти вершины суть концы выброшенного нами ребра. Осталось совершить проход по нему — и обход закончен. Аналогичные рассуждения проходят для случая двух нечётных вершин.

8. Их сиятельство граф

(а до того как-то и нет смысла пользоваться никакими правилами), то тут оно скорее гарантирует вам, что вы никогда не выберетесь. В самом деле, рассмотрим простейший лабиринт (см. рис. 28). Находясь во внутреннем кольце, вы не сможете выбраться и будете блуждать вдоль его стенок.

Возникает вопрос: а можно ли всё же как-то выбраться? Ситуация предполагается крайняя: вы не можете оставлять никаких меток, не говоря уже о возможностях типа «нити Ариадны», вы неспособны отличить одну комнату от другой. Единственное, на что вы способны, — это отличить выход. Эти ограничения компенсируются предположением, что у вас прекрасная память, хотя, как выяснится позднее, и это не обязательно. Итак как выйти из лабиринта?

Оказывается, выход есть всегда, что неудивительно, и более того, его всегда можно найти, что гораздо поразительнее. К алгоритму, описывающему способ отыскания выхода из любого лабиринта, и приведёт нас следующая цепь рассуждений.

Начнём с описания игры «Лабиринт». Играют двое. Один задумывает лабиринт, рисует его и нумерует в каждой комнате двери способом, известным одному ему. Второй игрок должен выбраться из лабиринта в соответствии со следующими правилами. Первый игрок отмечает его начальное положение. Второй же говорит слова типа «Выхожу из двери номер 3», на что первый отвечает: «Проходишь через дверь номер такой-то» (номер двери, в которую второй входит, первый ищет по своей схеме). Если оказывается, что двери с таким номером нет (номер больше количества дверей в комнате), то об этом сообщается. Сообщается, естественно, и когда первый достигнет выхода.

Игра очень увлекательная, попробуйте — не пожалеете. Эта ситуация в принципе уже хорошо моделирует настоящий лабиринт. Обычно, когда играют, заранее договариваются о том, что комнат и дверей в каждой комнате не больше, чем данные числа. При таких ограничениях искать выход можно по следующему чисто теоретическому рецепту. Заметим, что тогда су-

ществует только конечное число лабиринтов. Нарисуем все их планы. Каждый план размножим в количестве, равном количеству вершин, и, отметив на каждом из них вершину, назовём это картой. Теперь способ выхода такой. Берётся в руки первая карта и по ней строится план выхода из лабиринта — соответствующий маршрут, т. е. последовательность номеров дверей. Эти номера и диктуются. Если выйдем — всё в порядке. Если нет — карту выбрасываем, она не та (или та, но с неправильно отмеченной начальной вершиной), и берём следующую. На ней отмечаем уже пройденный маршрут. Если он там невозможен или должен был давно привести к выходу (чего, увы, не произошло), то эту карту тоже выбрасываем и берём следующую. Если же возможен, то отмечаем точку, в которой мы могли бы уже находиться, и из неё планируем новый маршрут к выходу — очередную последовательность дверей. Выйдем — чудесно. Не выйдем — карту долой и берём следующую. На ней опять же отмечаем уже пройденный маршрут, состоящий уже из двух последовательностей дверей, и так далее.

Основная идея в том, что мы либо выберемся, либо рано или поздно доберёмся до нужной карты с правильно отмеченной начальной вершиной. Тогда мы уже наверняка выберемся, так как у нас в руках правильная карта. Вот и всё.

Ясно, что при этом требуется очень-очень хорошая память — одних карт сколько! Переходя от игры к лабиринту, мы должны только продумать единый способ нумерации. Здесь мы поступим так: введём не абсолютную, а относительную нумерацию дверей — относительно той двери, в которую мы вошли. Сформулируем теперь это в виде задачи.

♣ **Задача.** Предположим, что путешественник, заблудившись в лабиринте, решил выйти из него, руководствуясь следующим правилом. Он задумал некоторую последовательность натуральных чисел k_1, k_2, k_3, \dots . Потом вошёл в первый попавшийся коридор и, войдя в комнату через дверь, отсчитал от неё k_1 дверей против часовой стрелки. В эту дверь он и направился, вышел в другую комнату, отсчитал k_2 дверей против

такой маршрут существует: например, вернуться назад (имея карту, это можно сделать) к отмеченной точке, а от неё, по условию, можно добраться до выхода. И так далее.

Данная последовательность действительно обеспечивает выход, так как рано или поздно мы доберёмся до истинной схемы (но, скорее всего, ещё раньше — выйдем).

Подчеркнём, что если бы мы нумеровали лабиринты по количеству вершин, то могли бы не пронумеровать все лабиринты: даже с одной вершиной существует бесконечное число лабиринтов, отвечающих графам с петлями. При нумерации схем мы такой опасности избегаем, так как предполагаем возможность выбраться. И, следовательно, если рёбер — конечное число, то и вершин должно быть конечное число.

А нельзя ли обойтись без таких сложных запоминаний и рисунков? После доказанной теоремы — можно.

♣ **Задача.** Привести конкретный пример указанной последовательности.

Решение. Так как в предыдущей задаче всё было основано на конечности, то, стало быть, для лабиринта с числом рёбер не выше заданного существует конечная последовательность, обеспечивающая выход из него. Но тогда красивый поворот: любая последовательность, содержащая все конечные последовательности, удовлетворяет условиям предыдущей, а значит, и настоящей задачи. Конкретный пример такой последовательности привести уже нетрудно. Она строится так: сначала все последовательности длины 1 из чисел не больше 1, затем — все последовательности длины 2 из чисел не больше двух и так далее. Вот её начало: 1; 1, 1; 1, 2; 2, 1; 2, 2; 1, 1, 1; 1, 1, 2; 1, 1, 3; 2, 1, 1 ... (точка с запятой используется для лучшей видимости закона построения). Существуют и более экономные последовательности, без таких повторов, — читатель сам их найдёт.

Вот, собственно, и всё. Насколько практичен этот алгоритм? Можете проверить на кубике Рубика, который тоже есть лабиринт. Согласно доказанному, алгоритм обеспечива-

8. Их сиятельство граф

ет сборку кубика из любого положения с закрытыми глазами — лишь бы кто-то вовремя сказал, что кубик уже собран. Представляете, сколько на это уйдёт времени? Это и есть ответ.

Прежде чем проститься с его сиятельством, несколько тренировочных задач.

♣ **Задача.** Беспризорник Вася умел из трёх окурков делать одну папиросину. Как-то раз он насобиравал аж 12 окурков. Сколько папирос ему удалось выкурить?

После того как вы строго докажете, что указанное вами число максимально (а с помощью графа получается действительно просто и строго), вам будет любопытно узнать, что Вася одолжил один окурочок у соседа и, выкурив последнюю шестую папиросу, отдал долг. Кстати, эта задача отнюдь не реклама курения.

♣ **Задача.** В тридевятом царстве есть 101 город. Из столицы выходит 21 ковролиния, из города Дальний — одна, а из всех остальных городов — по 20. Докажите, что из столицы можно долететь в Дальний (возможно, с пересадками).

♣ **Задача.** Можно ли из куска проволоки длиной 120 см сделать, не разламывая её, каркас куба с ребром 10 см?

♣ **Задача о свадьбах.** Имеется несколько юношей и девушек. Каждый из них влюблён ровно в двух представителей противоположного пола, причём любовь взаимная (если вам справедливо кажется, что любить двух сразу невозможно, считайте, что они с Казанга VI). Докажите, что их можно всех переженить по любви. Верно ли это, если каждый любит не менее двух?

Интересно порешать и общую задачу, в которой каждый юноша имеет несколько подруг.

♣ **Задача.** Докажите, что необходимым и достаточным условием возможности всех переженить является следующее: любые k юношей должны вместе иметь не менее k любимых, где $k = 1, 2, \dots, n$ (n — число девушек, равное числу юношей).

Да, чтобы не забыть: многожёнство и многомужество на Казанге VI тоже запрещены!

ХОТЬ ЧТО-ТО, НО НЕПОДВИЖНО!



9. *Хоть что-то, но неподвижно!*

Универсально лишь то, что достаточно для этого грубо.

Поль Валери. Из тетрадей

В этой главе речь пойдёт об инвариантах — о том, что не меняется, даже если поменялось всё.

♣ ЗАДАЧА. Решить уравнение

$$(x^2 + 3x - 1)^2 + 3(x^2 + 3x - 1) - 1 = x.$$

Поиск решения. Стандартное начало — попытаться с ходу угадать корни. Известно, и как это делать: если есть целые решения, то они наверняка — делители свободного члена. Мы пройдем мимо этой возможности — и не потому, что она окажется безуспешной. Как раз наоборот: таким путём решение найти можно, и читатель должен немедленно в этом поупражняться. Но мы сделаем вид, что эта попытка нам успеха не принесла, чтобы поискать другой метод решения.

Как тогда можно по-другому подойти к этому уравнению? Оно явно как-то хитро закручено: неспроста в нём всё по нескольку раз повторяется. В чём же чувствуется эта повторяемость? Такое впечатление, будто бы из какого-то другого уравнения это уравнение получили повторением. Нельзя ли сказанное поточнее выразить? В основе повторения явно лежит многочлен $f(x) = x^2 + 3x - 1$. А как повторение выглядит? Будто бы тот же многочлен применили ещё раз, но в большем масштабе. Это уже определённое. Да, именно так: левая часть уравнения есть не что иное, как $f(f(x))$. Тогда само уравнение выглядит так: $f(f(x)) = x$. Прекрасно! Что бы с ним ещё можно сделать? Всё-таки как-то неестественно две буквы f . Одна — другое дело. А что, почему бы и не рассмотреть уравнение $f(x) = x$? Что могло бы дать такое уравнение? Не связано ли оно как-то с нашим? Чтобы как-то связать, надо попробовать приписать слева и справа ещё по одной букве f . Тогда получится $f(f(x)) = f(x)$. К сожалению, немножко не то. А почему не то? Правую часть ведь можно заменить на x , так как $f(x) = x$. И тогда получим в точности исходное уравнение,

9. *Хоть что-то, но недвижно!*

ура! Так, а что нам это даёт? Ясно что — решения исходного уравнения, по крайней мере два. На самом деле даже больше: многочлен $f(f(x)) - x$ должен делиться на многочлен $f(x) - x$, так как корни второго являются корнями первого. Осталось поделить эти два многочлена и получить разложение на множители. Что? Вы не знаете, как делятся многочлены? Да очень просто — так же, как и числа: вот простейший пример, из которого всё должно быть ясно:

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 2x^2 + x - 3 & x^2 + x + 1 \\
 \underline{x^3 + x^2 + x} & x - 3 \\
 -3x^2 + 0x - 3 & \\
 \underline{-3x^2 - 3x - 3} & \\
 +3x &
 \end{array}$$

Какие ещё могут быть вопросы? Частное при делении многочлена $x^3 - 2x^2 + x - 3$ на $x^2 + x + 1$ — многочлен $x - 3$, остаток — многочлен $3x$. Вот и всё.

Этот приём заслуживает запоминания: часто удаётся угадать какой-то корень уравнения, скажем, c . Тогда деление на многочлен $x - c$ должно произойти нацело, а степень частного уже будет меньше.

Возвращаясь к нашей задаче, скажем только, что после разложения на множители мы получим два квадратных уравнения, и, стало быть, интерес к задаче должен быть утрачен.

А вот на что стоит обратить особое внимание — так это на уравнение $f(x) = x$. Точка x , являющаяся его решением, называется неподвижной точкой. Неподвижные точки, а в более широком контексте — инварианты, т. е. величины, не меняющиеся при преобразованиях, играют настолько важную роль, что, безусловно, заслуживает право на существование такой совет:

ЕСЛИ ЕСТЬ ПРОЦЕСС — ИЩИ ИНВАРИАНТ.

9. Хоть что-то, но неподвижно!

Цель данной главы — привести несколько убедительных примеров в пользу этого правила и обучить читателя использованию инвариантов в нескольких стандартных ситуациях. В отличие от других глав, здесь мы начнём с более сложного примера, чем обычно.

♣ **Задача.** Кубик Рубика повернули нечётное число раз (поворот на 180° считается за два поворота). Доказать, что его нельзя вернуть в исходное состояние за чётное число поворотов.

Вначале мы приведём один из возможных образцов решения, а потом расскажем об истинном источнике подобных решений.

Решение. Занумеруем все угловые кубики числами от 1 до 8 и нарисуем между ними стрелочки по следующему правилу: стрелочки проводятся только из кубиков с меньшими номерами в большие. Скажем, из кубика с номером 5 будет выходить три стрелочки, а входить четыре.

Утверждение задачи будет доказано, если мы покажем, что за один поворот переворачивается нечётное число стрелок (имеется в виду, что после поворота стрелки будут нарисованы заново, и новый рисунок сравнивается с прежним).

Приступим к такому доказательству, рассмотрев поворот, скажем, верхней грани. Давайте разберёмся, какие могут про-

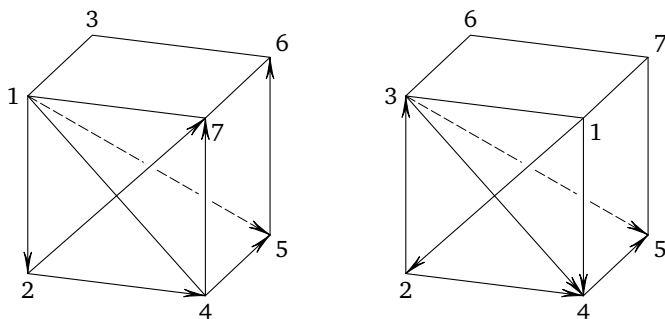


Рис. 29. Часть стрелок переворачивается

9. *Хоть что-то, но недвижно!*

изойти изменения. На нижней грани изменений, конечно же, не произойдёт, так как мы её не трогали. Обратимся теперь к стрелочкам между вершинами нижней и верхней граней (рис. 29). Здесь изменения уже могут произойти, но докажем, что перевернётся чётное число стрелок. Действительно, допустим, что было x стрелок снизу вверх и y стрелок сверху вниз. После поворота это число не изменилось, хотя стрелки могли поменяться местами. Пусть K стрелок перевернулось сверху вниз. Чтобы общее число стрелок, смотрящих вверх, не изменилось, необходимо, чтобы столько же стрелок перевернулось снизу вверх. Тогда общее число перевернувшихся стрелок $2K$ — число чётное, что и требовалось.

Займёмся теперь изменениями на верхней грани. Здесь имеется шесть стрелок — две диагонали и четыре по бокам грани. Докажем, что если боковые стрелки и перевернутся, то в чётном числе. Рассуждение будет совершенно аналогичным уже приведённому, но рисунок мы рассмотрим другой

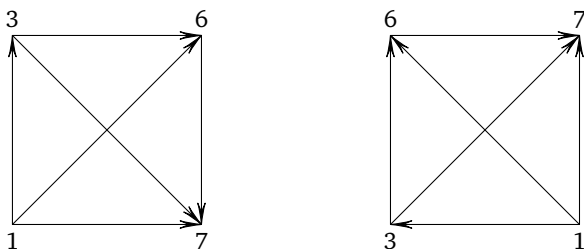


Рис. 30. Перевернулось нечётное число стрелок

(рис. 30). Часть боковых стрелок смотрит по часовой стрелке, а часть — против. После поворота это число не изменится. Теперь пусть K стрелок изменят направление по часовой на направление против часовой. Чтобы общее число стрелок, смотрящих по часовой стрелке, не изменилось, необходимо, чтобы K стрелок развернулось в обратном направлении: с «против» на «по». Итого перевернётся $2K$ стрелок — чётное число. Осталось разобраться с двумя стрелками на диагоналях. Несложно

убедиться, что перевернётся ровно одна стрелка. Вывод: общее число перевернувшихся стрелок нечётно, что и требовалось.

Комментарии к решению. Разумеется, такие решения придумываются совсем не во время решения задачи, и даже не в процессе чистки решения, а тогда, когда возникает потребность изложить применение какого-то общего метода к частной задаче, но нет желания или не позволяет объём книги рассказывать общий метод. Тогда это общее решение как-то переводят на «детский» язык со всякими стрелочками — лишь бы понятно было. Пример такого перевода и преподнесён ранее. А теперь, если читатель хочет познакомиться с общим методом, он должен сконцентрировать своё внимание: метод несколько суховат. Идея метода состоит в важном понятии чётности перестановки. Вот как это понятие вводится.

Предположим, что у вас имеется K различных предметов. Вы их как-то переставили. Эта перестановка имеет чётность, которую обычно обозначают $+1$ или -1 . Как её узнать? Представьте себе, что перестановку вы делали двумя руками поэтапно, меняя по очереди ровно два предмета. Теперь всё зависит от того, сколько таких перестановок по два предмета вам придётся сделать. Если — чётное число, то общая перестановка называется чётной и её чётность $+1$, если же нечётное, то, разумеется, чётность -1 .

Например, у вас было четыре предмета, скажем, арбуз, барабан, вилка и газета, и вы решили переставить их в обратном порядке: газета, вилка, барабан, арбуз. Какова чётность такой перестановки? Очень просто определяется. Первая перестановка — арбуз меняем местами с газетой, для краткости такой обмен обозначим (А, Г). Следующий обмен — (Б, В), и всё в порядке. Чётность $+1$. Важнейший вопрос: а если бы мы переставили парами как-то по-другому, получили бы ту же чётность? Например, будем переставлять только соседей. Вот так: (А, Б), затем (А, В) и (А, Г) — этим мы уже получили порядок Б, В, Г, А. Осталось произвести (Б, В), (Б, Г) и (В, Г). Общее число — шесть штук (кстати, чтобы не называть

их штуками: перестановки, которые переставляют ровно два предмета, называются транспозициями). Всё равно получили чётное число. Значит, в этом случае всё в порядке. Оказывается, и всегда всё будет в полном порядке: чётность не зависит от того, в каком порядке и какими транспозициями пользоваться. Это — важная теорема, доказать которую рекомендуется самому читателю. Собственно говоря, единственное, что она утверждает, это то, что понятие корректно, другими словами, что понятие чётности, как мы его ввели, — честно определённое понятие и внутренних противоречий в себе не содержит, а следовательно, имеет право на существование.

Чётность — это важнейший инвариант. Практически каждую задачу, где что-то переставляется, имеет смысл оценить с точки зрения чётности встречающихся там перестановок. А причина этого проста: закон умножения четностей совпадает с законом умножения плюс-минус единиц: произведение нечётных перестановок, например, чётная, а чётной на нечётную — нечётная. Стоп! А что это ещё такое — произведение перестановок? Это очень просто: произведением двух перестановок называется их последовательное выполнение. По существу мы с ним уже встретились: вышеупомянутая перестановка арбуза и прочего в обратном порядке была реализована как произведение транспозиций: (А, Г) и (Б, В). Не углубляясь больше в произведения (а углубиться можно было бы до понятия группы), отметим только, что произведение перестановок некоммутативно. Говоря по-простому: результат произведения зависит от порядка сомножителей. Например, произведение перестановки (А, Б) на перестановку (Б, В) даст результат В, А, Б, Г, а если сначала делать перестановку (Б, В), а лишь затем — (А, Б), то получится Б, В, А, Г. Есть разница? Но всё это не беда, главное, что чётность умножается совершенно независимо от этих тонкостей и по уже отмеченным правилам!

Вернёмся к задаче про кубик Рубика. Намётанный глаз сразу увидит здесь чётность: за один поворот происходит нечёт-

9. *Хоть что-то, но неподвижно!*

ная перестановка угловых кубиков. Значит, результат нечётного числа поворотов — нечётная перестановка, а чётного — чётная. Вот и всё решение!

Чтобы это стало прозрачно в для читателя, предложим ему удобный практический рецепт определения чётности, чтобы ему не приходилось мучительно переставлять элементы парами. Идея состоит в разложении любой перестановки в циклы. Чтобы показать, как оно делается, рассмотрим немного более длинную перестановку. Допустим, что начальным был порядок А, В, В, Г, Д, Е, а после перестановки он оказался таким: В, Е, Г, А, Д, Б. Посмотрим, что делает эта перестановка. А она переводит в В (т. е. на месте А оказался элемент В). А куда перешёл В? Он перешёл в Г. Г куда? Г — обратно в А. Зациклились. Это и есть первый цикл. Записывается он так: (А, В, Г). Есть ещё один цикл на оставшихся буквах (Б, Е). Обозначение совпало с обозначением для транспозиции, и это естественно: транспозиция — это цикл длины 2. Итого наша перестановка записывается как произведение двух циклов (А, В, Г) и (Б, Е) — в любом порядке. А куда пропал Д? А он просто остался на месте. Нет необходимости отмечать такие элементы. Подобным образом любую перестановку можно разложить в произведение циклов. А теперь правило: чётность цикла противоположна чётности его длины. Скажем, цикл длины 7 — чётен, а длины 4 — нечётен. А чётность произведения уже определить нетрудно. В вышеприведённом примере — это -1 , так как цикл длины 3 чётен, а длины 2 — нечётен и их произведение — нечётная перестановка.

Теперь уже ясно, как сразу мы догадались, что поворот кубика Рубика — это нечётная перестановка: там же попросту был цикл длины 4, который нечётен.

Чтобы покончить с кубиком Рубика, скажем, что чётность — это отнюдь не единственный вариант, с ним связанный. Их там много, и о них можно прочитать, например, в журнале «Квант» (1982, № 8). Там же излагается идея краси-

9. *Хоть что-то, но недвижно!*

вейшего алгоритма его сборки: когда на место «загоняются» не кубики, а инварианты. Когда все инварианты будут получены — кубик будет собран. Другое дело, что для реализации этого алгоритма по тем намёкам, которые есть в журнале, надо немало потрудиться.

А что касается чётности, то нельзя не упомянуть знаменитые «пятнашки» (название, правда, неверное, но употребительное) — игру «15» (рис. 31). Наверное, кое-кто из читателей

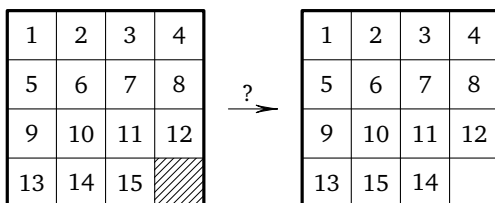


Рис. 31. Игра «15»

слышал о знаменитой премии тому, кто придумает способ, как из исходной позиции получить позицию, отличающуюся от исходной только тем, что 14 и 15 в ней переставлены местами. Сейчас нам должно быть понятно, почему премию никто так и не получил: требуется сделать транспозицию, т. е. нечётную перестановку, а несложно убедиться, что условия игры в «15» допускают только чётные перестановки.

Как ни увлекательны эти темы, мы должны перейти к другим.

♣ **Задача.** На доске написаны три целых числа. Затем одно из них стёрли и вместо него написали сумму двух оставшихся чисел, уменьшенную на единицу. Эту операцию повторили несколько раз, и в результате получили числа 17, 1967, 1983. Могли ли на доске первоначально быть записаны числа а) 2, 2, 2; б) 3, 3, 3?

Эта задача была предложена на Всесоюзной олимпиаде 1983 года. Предполагалось, что путь её решения — так называемый «обратный ход», когда задачу начинают раскручивать

с конца: как могло такое получиться, каким был последний ход, каким предпоследний — вот типичные вопросы такого подхода. Каково же было удивление жюри, когда обнаружилось, что многие участники нашли совершенно «прозрачное» решение задачи а), которое мы и приведём.

Решение задачи а). После первого же хода мы из чисел 2, 2, 2 получим 2, 2, 3, т. е. два чётных числа и одно нечётное. Нетрудно видеть, что такой же состав останется и после других ходов — чётное число заменяется на сумму чётного и нечётного минус единица, т. е. чётное, а нечётное число подобным образом — на нечётное. Так как в конце мы должны получить три нечётных числа, то это невозможно.

Решение задачи б) мы оставим читателю — для овладения методом обратного хода, а сами вернёмся к задаче а). Что помогло в её решении? Инвариант. Им оказалось словосочетание «два чётных, одно нечётное». Что вообще характерно для инвариантности? Коль скоро она носит универсальный характер, то согласно процитированному эпиграфу из П. Валери инвариантность — это грубость. Причём грубость не по форме, которая может быть сколь угодно изошрённой, а по содержанию. Чётность — типичный пример. Определение довольно тонкое, но делит все перестановки всего на два класса: очень грубое деление зато как работает! Именно такие грубые разбиения и служат основой и признаком инвариантов.

✦ **Задача.** На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся малиновыми и так далее). Может ли случиться, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?

Поиск решения. Отдав должное приятной формулировке задачи, всё же несколько формализуем её. Имеется тройка чисел (13, 15, 17). Разрешается делать с ней следующие преобразования: к одному из чисел прибавить двойку, а от

9. Хоть что-то, но недвижно!

двух оставшихся одновременно отнять единицу. Спрашивается, можно ли получить один из наборов: $(45, 0, 0)$; $(0, 45, 0)$ или $(0, 0, 45)$?

Имеем процесс. Начнём искать инвариант. Прежде всего посмотрим, что можно сделать за один шаг. Можно получить $(12, 14, 19)$? Видны ли какие-либо грубые неизменные вещи? Нет, разве что разность между первым и вторым членом не изменилась. А что с ней произойдёт при каком-нибудь другом преобразовании? Мы можем получить из исходного набора также набор $(12, 17, 16)$. Что здесь можно сказать относительно разности первого и второго? Она изменилась. Кстати, на сколько? На три. Ладно, и третье изменение из исходного: $(15, 14, 16)$. Здесь разность совсем изменилась. А сейчас на сколько? Было -2 , а стало $+1$. Разность -3 . Что? Тройка у нас уже встречалась? Когда? В предыдущем случае. Только там в другую сторону. Всё равно, что-то в этом есть. Не пора ли перейти к остаткам (см. главу о остатках)? Остатки по модулю три. Исходная тройка чисел преобразуется в набор остатков $(1, 0, 2)$. Требуется получить остатки $(0, 0, 0)$ во всех трёх случаях. Отлично! Что можем получить после первого преобразования? $(0, 2, 1)$, или $(0, 2, 1)$, или... $(0, 2, 1)$ — каким путём ни иди! Замечательно! А на следующем шаге? $(2, 1, 0)$. И на следующем шаге опять вернёмся в исходное состояние $(1, 0, 2)$. В общем-то понятно: с точки зрения остатков у нас совершается такое преобразование за один ход: к каждому остатку прибавляется 2 (или, что то же самое, с точки зрения остатков при делении на три — отнимается по единице). Теперь понятно, что никогда три нуля мы не получим.

Промежуточное решение найдено. Теперь совсем нетрудно очистить его до конца: инвариант — это разность между первым и вторым членом, взятая по модулю три. Она — всегда единица. Это и есть нужный инвариант, который и покажет, что получить всех хамелеонов одного цвета не удастся (для них значение инварианта равно 0).

9. *Хоть что-то, но недвижно!*

Читатель уже понял, что остатки — это замечательный кандидат в инварианты. Поэтому он без труда решит следующие тренировочные задачи:

1. Провести полное исследование: когда из одной тройки чисел можно получить другую (за справками — «Квант», 1985, № 7).

2. На прямой сидят три кузнечика A , B , C . Они начинают играть в чехарду, т. е. прыгать один через другого (но не через двух сразу). Смогут ли они через 1987 прыжков оказаться на прежних местах?

3. Круг разбит на шесть секторов, в которых по часовой стрелке расставлены числа $0, 0, 1, 0, 1, 0$. Разрешается добавлять по единице к любым двум соседним числам. Можно ли таким образом добиться того, чтобы все числа стали равны?

Более или менее понятно, как использовать инвариант для доказательства разных невозможностей. А может ли идея инварианта оказаться полезной для доказательства возможности чего-либо?

♣ **Задача.** В таблице $m \times n$ разрешается у всех чисел одной строки или у всех чисел одного столбца изменить знак. Доказать, что несколькими такими заменами можно добиться того, чтобы сумма чисел в каждом столбце и в каждой строке была неотрицательна.

Поиск решения. Мы должны выяснить, что происходит за одно преобразование. Часть чисел из положительных становятся отрицательными, а часть, наоборот, — из отрицательных положительными. Может быть, благодаря этому мы можем все числа сделать положительными? Хорошо бы. Проверим на примере. Если у нас таблица 2×2 и стоят три единицы,

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & -3 \\ \hline -5 & -6 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline -2 & -3 \\ \hline 5 & -6 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline -2 & 3 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array}$$

На путях усовершенствования

9. *Хоть что-то, но недвижно!*

а одна — минус единица, то... единиц с минусом всегда будет либо одна, либо три (кто не верит — пусть проверит). Да, обидно. Хорошая была идея.

А что ещё? Процесс какой-то, может, инвариант поискать. Что не меняется? Модуль произведения всех чисел. А если размеры чётны, то и произведения как построчные, так и постолбцовые (а это правильное слово — постолбцовые?). Неясно. Как же добиться улучшения? Может быть, количество отрицательных чисел уменьшать? Да, неплохо бы, но и это может ничего не дать: не исключено, что останется только одно отрицательное число, но зато какое... Но ведь хоть что-то должно улучшаться. А что, если делать просто: как только встречается отрицательная сумма в строке или столбце, так и меняем знак в этом месте. Надо понять на примерах, чем плоха такая примитивная тактика.

К большому удивлению, все примеры приводят к благополучному исходу: в конце концов все строки и столбцы становятся хорошими, причём в каком бы порядке мы ни действовали, лишь бы из отрицательной суммы делали положительную.

Тогда это надо строго доказать. Но за счёт чего? А что, собственно, может помешать? Ну, например, можем зациклиться: вынуждены будем поочерёдно менять то, скажем, первый столбец, то первую строку. Хотя похоже, что такого происходить не может: в наших примерах (надеемся, что у читателя наготове свои примеры) не было даже намёка на возможность такой ситуации. Каким-то образом всё непрерывно улучшается. Но как это выразить конкретно? Что может улучшиться? Что-то грубое, какой-то обычный инвариант. Ну конечно же — сумма всех чисел! С каждой такой операцией она увеличивается. Это гарантирует нас от закливания. А что ещё? Гарантирует нам конец — эту сумму нельзя увеличивать бесконечно. Почему? Да просто потому, что различных таблиц можно получить из нашей только конечное число.

Проанализируем решение. Чётко можно сформулировать два правила. Первое: *чтобы понять, почему получится что-*

9. *Хоть что-то, но неподвижно!*

то хорошее, надо увидеть, что улучшается. Другими словами, надо искать какой-то показатель качества, гарантирующий нам шаг в нужном направлении. При этом основное требование — улучшение не должно происходить бесконечно, оно должно быть обречено на конечность, иначе мы никогда не доберёмся до цели. Где же нам искать такие критерии роста? Здесь второй совет и одновременно ответ на вопрос о полезности идеи инварианта: *то, что в одних задачах инвариант, в других — критерий роста.* Иными словами, характеристики, которые могут улучшаться, но не бесконечно, по своей природе близки к инвариантам. Например, если обычный инвариант — делимость, скажем, на три, то хорошим показателем качества в других задачах может служить делимость на степени тройки: чем на большую степень делится, тем лучше. А если, например, заведомо известно, что число не может быть очень большим, то получаем, что слишком хорошо быть не может: существует степень, на которую наше число уже делиться не может, если это не нуль.

Другие типичные характеристики: разность между наибольшим и наименьшим, площадь, количество «беспорядка» и так далее.

Как всегда — несколько тренировочных задач как на инвариант, так и на процессы с улучшением.

♣ **Задача.** Имеется 35 целых чисел. Разрешается одновременно прибавлять по единице к некоторым 23 из них. Доказать, что, повторив эту операцию достаточное число раз, можно сделать все числа равными. Если мы возьмём вместо чисел 35 и 23 произвольные натуральные числа A и B , каким условиям должны они удовлетворять, чтобы условия задачи остались справедливыми?

♣ **Задача.** В ящик ставим два ящика, в каждый из этих двух ящиков ставим ещё два ящика, в каждый из этих четырёх — ещё два и так далее. После k таких операций получаем 2^k маленьких ящиков. В каждый из них кладём по монете орлом

9. *Хоть что-то, но недвижно!*

или решкой вверх. Разрешается перевернуть одновременно все монеты в каком-то ящике (любого размера).

1. Доказать, что не более чем за k операций можно уравнять число орлов и решек.

2. За какое наименьшее число переворачиваний можно (при произвольном начальном расположении монет) добиться того, чтобы все монеты лежали орлом вверх?

✦ Задача. В банке летают три мухи. Всякий раз, когда мухи со скоростями A и B сталкиваются, они разлетаются со скоростями $\frac{A^2 + 2AB}{A+B}$ и $\frac{B^2}{A+B}$. Может ли через некоторое время оказаться, что все мухи удвоили свои скорости?

✦ Задача. На плоскости отмечено 100 точек, соединённых попарно пятьюдесятью отрезками. Каждую секунду пара пересекающихся отрезков заменяется на пару непересекающихся отрезков с теми же концами. Докажите, что через несколько секунд пересекающихся отрезков не останется.



ЖИВОПИСЦЫ, ОКУНИТЕ ВАШИ КИСТИ



10. Живописцы, окуните ваши кисти

Так, например, чёрный цвет служит для выражения горя, красный — величия и страдания, фиолетовый — раскаяния и смирения, зелёный — надежды.

М. К. Претте, А. Капальдо. Творчество и выражение

Для этой главы трудно найти более убедительное начало, чем следующая задача, с триумфом обошедшая почти все сборники олимпиадных и занимательных задач.

Из доски 8×8 вырезали два противоположных угла, лежащих на концах одной большой диагонали. Можно ли оставшиеся 62 клеточки покрыть 31 плиточкой размером 2×1 ?

Поиск решения. Можно или нельзя — что за вопрос такой! Сказали бы сразу — доказать, что можно, или доказать, что нельзя, а тут решай сразу две задачи, и ещё неизвестно, какая верная. А почему бы, в самом деле, не попробовать покрыть всё плиточками? Нарисуем быстренько. Вот так, так и... Гм, не получилось. А вот здесь надо чуть переделать, и тогда... Тогда опять не получится. Может быть, это можно сделать, но очень хитро (было бы просто — не давали бы задачу). А может, нельзя? Да, но как это докажешь? Не перебирать же все возможные способы. А всё-таки. 8×8 . Что-то знакомое. Шахматная доска. А действительно, почему бы не перенестись на обычную шахматную доску? Значит, так, вырежем мысленно

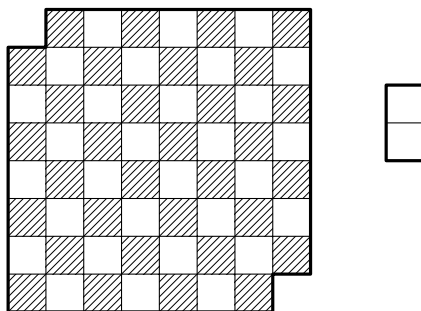


Рис. 32. Противоположные углы вырезаны

из неё две клеточки: вот эту, беленькую, и вот эту — тоже беленькую (рис. 32). И начнём покрывать. Ну вот, опять осталось две клеточки. Черненькие. А если так? И так остаются. А так? Опять, и опять черненькие! Стоп-стоп, в этом что-то есть! Значит, так. Вырезали мы две беленькие клеточки. Осталось, стало быть, 32 чёрные и 30 белых. А тогда... всё понятно! Каждая плиточка покрывает одну белую и одну чёрную клеточку. Следовательно, 30 плиточек ещё как-то уложить можно, а для последней, 31-й, уже не останется белого цвета. Потому-то и не получится. Всё.

Итак, задача оказалась решённой только за счёт того, что шахматную доску принято раскрашивать. Приём этот — раскраска — один из эффектных, и в данной главе мы будем рассматривать именно задачи на раскраску. Часть задач — это те, в которых раскраска — метод решения, а часть — это задачи про раскраску, которые весьма популярны на олимпиадах.

Иногда догадаться что-то раскрасить кажется просто невозможным. Ну что, казалось бы, имеет общего с раскраской понятие монотонности?

♣ **Задача.** Доказать, что из любой последовательности можно, стерев часть её членов, получить монотонную бесконечную последовательность, т. е. невозрастающую или неубывающую.

Поиск решения. К такого рода задачам, когда в ответе может быть либо то, либо другое, очень трудно сразу найти верный подход. Любое начало может привести не к тому случаю. Что же делать? А самое обидное, что по конечному случаю ничего не скажешь: надо смотреть на всю последовательность сразу. А как иметь дело с бесконечным числом объектов, пусть даже членов последовательности? Ну хорошо, допустим, я начну строить какую-то возрастающую последовательность. Откуда я узнаю, что за последним членом есть ещё что-то большее или хотя бы не меньшее? Вот если бы я знал это заранее, то... Интересно, а как я могу это знать заранее? Вполне могу — это очень простой вопрос: есть за данным членом последовательности кто-то больший или нет.

А что, если, в самом деле, все такие члены как-то заранее выделить? Как только, покрасить, что ли? А почему бы и нет? Итак, возьмём и покрасим все члены последовательности, за которыми есть члены, бóльшие, чем они сами... Тогда... могут быть два случая: покрашенных бесконечно много или только конечное число. Какой случай проще (вообще-то хорошо, что их два — это даёт надежду на два разных вывода, что и требуется по условиям)? Пожалуй, хочется начать с конечного. Значит пусть только конечное число точек покрасилось. Сотрём их сразу, чтобы не мешали. Оставшиеся — непокрашенные. А что значит, что данный член последовательности не удалось закрасить? Это значит, что нет за ним члена, бóльшего, чем он, т. е. все, что дальше — меньше: чем дальше, тем меньше (там же тоже непокрашенные). И это прекрасно: получаем невозрастающую последовательность. Ещё раз. Берём первый член. За ним — не больше его. Берём второй. А если он покрашен? Нет, мы их уже выбросили. Значит, он тоже непокрашен, и за ним — меньшие. Да таким образом подряд наберём невозрастающую последовательность. Прекрасно! А теперь неплохо бы заняться вторым случаем, пожалуй, основным: покрашенных членов бесконечно много. Тогда естественно попробовать и взять их все в качестве возрастающей последовательности. Попробуем. Берём первый член. За ним должен быть бóльший его. Берём тот. За ним... Минуточку, а если тот непокрашен? Плохо. А если взять сразу покрашенное число, то, которое следующее. Тогда почему оно будет больше, чем первое? М-да, запутались.

Что же делать-то? Первый-то случай как хорошо прошёл. Такое впечатление, что надо было как раз незакрашенные и закрасивать. А что — и закрасим, скажем, в зелёный цвет, который цвет надежды. Чётко: закрасим в зелёный цвет все те точки, которые не больше, чем все последующие. Откуда-то взялись какие-то точки. Надо же, как трудно красить числа! Ну ладно, пусть называются точками. Хоть крокодилами, лишь бы задача решилась!

Что же мы имеем? Если зелёных точек много, то доказывать мы умеем. Много — это сколько? Чтобы незелёных было только конечное число. А меньше нельзя? Смотрим на доказательство... Вполне можно. Если зелёных точек бесконечно много, то всё рассуждение проходит: они сами и образуют монотонную невозрастающую последовательность. Да, а почему такое неравноправие: надо бы тогда особым цветом, скажем, красным, покрасить и те точки, за которыми все члены строго большие. Тогда если будет бесконечное множество красных элементов последовательности, то тоже отлично: они дадут возрастающую последовательность.

А зачем нам всё же красные точки? Без них можно обойтись. Ну-ка, внимательно. Если зелёных бесконечно много, то всё в порядке, если — конечное число, то их надо бы стереть. Тогда все оставшиеся — незелёные, т. е. то, что мы раньше называли покрашенными (запутаться можно)! Ещё несколько минут внимания. Сконцентрировались. Итак, все точки незелёные. За каждой есть бóльшая. Вот так и будем их брать. Первую — любую. За ней есть бóльшая. Она тоже незелёная. За ней тоже есть бóльшая, и тоже незелёная. Вот так и построим!

Комментарий. Не правда ли, мучительны поиски истины? Конечно же, всё это можно было бы пригладить, например, не упоминать про так и не понадобившийся красный цвет. Можно было и вовсе изложить изящное очищенное решение (читатель, хочется верить, приведёт его сам, тем более, что оно может пригодиться для одной из задач в конце книги), но хотелось показать честный путь рождения решения. Особенно то, как поначалу чуждая идея раскраски стала основной, естественной и даже чуть было не заслонила путь к решению (красный цвет). А сколько ещё опущено мыслей, догадок и просто отвлечений в сторону. А всё это — тоже необходимые элементы творчества. Об этом невозможно написать, и единственная разумная альтернатива — попытаться передать *состояние*. Впрочем, не это ли цель искусства?

В рассмотренной задаче мы раскрашивали числа. Иногда, наоборот, приходится из красок делать числа.

♣ **Задача.** Каждая вершина правильного $2K$ -угольника раскрашена в один из $2K$ цветов, причём все вершины в разный цвет. Второй точно такой же $2K$ -угольник тоже раскрасили каким-то образом теми же $2K$ красками (опять же разные вершины — в разный цвет) и положили сверху на первый. Доказать, что, не переворачивая, верхний $2K$ -угольник можно повернуть так, что по крайней мере в двух местах цвета вершин совпадут.

Решение. Приведём сразу решение задачи, а лишь после этого скажем несколько слов о его поиске. Прежде всего докажем полезную лемму.

Лемма. *Натуральные числа $1, 2, \dots, 2K$ расставили в каком-то порядке, и из каждого числа вычли его порядковый номер. Доказать, что из этих $2K$ разностей найдутся две с одинаковым остатком при делении на $2K$.*

Доказательство леммы. Предположим противное. Тогда все остатки разные: от 0 до $2K - 1$ (должны присутствовать все остатки, так как разностей $2K$ штук — принцип Дирихле, см. соответствующую главу). Рассмотрим сумму всех этих разностей. С одной стороны, она должна равняться нулю, так как это просто разность двух одинаковых сумм — чисел от 1 до $2K$, только суммирование происходило в разном порядке. Посмотрим, однако на эту разность с точки зрения остатков (не вредно заодно просмотреть главу об остатках). По идее, это должна быть сумма всех остатков от 0 до $2K - 1$ включительно. Но эта сумма равна по формуле суммы прогрессии

$$0 + 1 + 2 + \dots + 2K - 1 = (2K - 1)2K/2,$$

т. е. $(2K - 1)K$. Но последнее число никак на $2K$ делиться не может, так как первый сомножитель нечётен. Мы получили противоречие: с одной стороны, сумма равняется нулю, а с другой — остаток этой суммы разностей не равен нулю. Данное противоречие и доказывает лемму.

Вернёмся теперь к нашей задаче. Заменяем каждую краску на натуральное число. Таким образом, в вершинах у нас будут стоять натуральные числа от 1 до $2K$ включительно, при этом мы можем считать, что внизу они расположены последовательно по часовой стрелке, а вверху как-то переставлены. По лемме, найдутся две разности между нижними и верхними числами с равными остатками при делении на $2K$. Пусть этот остаток равен P . Поворот верхнего $2K$ -угольника на угол $\frac{P\pi}{K}$ будет требуемым. Действительно, если остаток равен нулю, то совпадение уже есть, а после поворота на $\frac{\pi}{K}$ все остатки, кроме нулевого, уменьшаются на 1 (поворот производится по часовой стрелке — см. рис. 33).

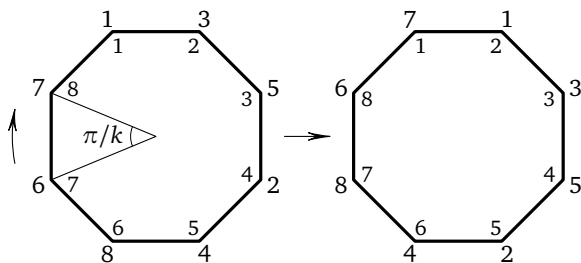


Рис. 33. До и после поворота

Насколько реально придумать такое решение? Прямо сразу, вот в таком виде — практически невозможно. А придумываются подобные решения примерно так: поначалу изучается случай четырёх- и шестиугольников. Для них как-то строится очень корявое доказательство. Довольно-таки быстро приходит необходимость обозначать краски буквами, а ещё лучше — цифрами. Повертев немного эти многоугольники, очень скоро начинаешь разбираться, что для того, чтобы не получилось совпадения цветов, необходимо, чтобы при каждом повороте совпадал только один цвет, точнее — ровно один. Вполне можно приглядеться и к тому, как определить нужный поворот для совпадения нужного цвета — по разности между двумя

числами. Однако трудности с отрицательными числами неминуемо выводят на остатки, а тут уже рукой подать до леммы. Что касается самой леммы, то как найти её доказательство, объяснить труднее. Тут где-то должен сказаться опыт работы с остатками, без него сложнее. Впрочем, это — тема другой главы.

Следующая задача была предложена на Всесоюзной олимпиаде 1984 года.

♣ **Задача.** Имеется много одинаковых квадратных плиточек и четыре краски. Разрешается окрашивать каждую плиточку в четыре цвета (по рёбрам) и приклеивать их друг к другу рёбрами одного цвета. Требуется склеить прямоугольник размером $m \times n$, каждая сторона которого была бы одного цвета, причём чтобы все цвета были разные. Для каких m и n это можно сделать?

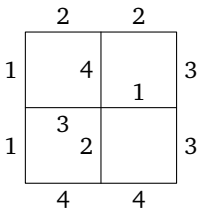


Рис. 34. Случай 2×2

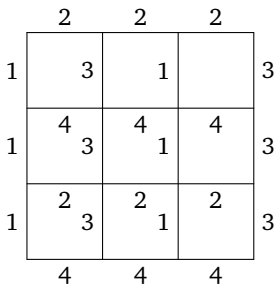


Рис. 35. Случай 3×3

Поиск решения. Такие задачи, конечно же, приятнее всего начинать с маленьких примеров и простейших переборов. Довольно быстро будут установлены первые факты. Скажем, несложно склеить квадратик размером 2×2 (рис. 34). Конечно же, вместо красок мы пишем на картинке числа: от 1 до 4. Нетрудно построить также квадратик 3×3 (рис. 35). Он строится всего из двух типов раскрашенных плиток, симметричных друг другу. Совсем нетрудно понять после этого, что так можно раскрасить любой прямоугольник, оба размера которого — нечётные числа. Далее будем считать, что один из размеров всегда чётен.

Теперь начинается более подробный анализ. Начнём с полосы $1 \times 2k$

10. Живописцы, окуните ваши кисти

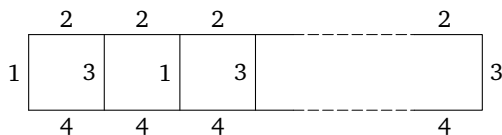


Рис. 36. Полоска шириной 1

(рис. 36). Увы, довольно скоро приходится убедиться, что ничего не получается: если задать цвета сторон полосы, то внутренние плитки определяются однозначно и цвет 1 в вертикали должен появляться через раз. Но тогда, так как вертикальных линий $2k \times 1$, крайняя справа линия тоже должна быть цвета 1, что невозможно.

Следующий шаг — полосы $2 \times 2k$ и $2 \times (2k + 1)$. Предоставим читателю самому разобраться, как раскрашиваются прямоугольники $2 \times 2k$, а с их помощью — вообще любой прямоугольник с обеими чётными сторонами. Отметим только пользу от раскрасок такого типа, как на рис. 37, — это не то, что нам нужно, но из таких можно клеить нужные.

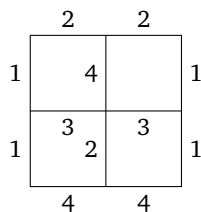


Рис. 37. Вспомогательный квадрат

Остался самый трудный этап: одна сторона чётная, другая — нечётная. Случай 2×3 никак не хочет получаться. Но почему?

Приходится ещё раз вернуться к случаю $1 \times 2k$. Может быть, там хоть что-то прояснится, может, именно там идея. В самом деле, почему $1 \times (2k + 1)$ получается, а $1 \times 2k$ — нет. Может быть, идея в чередовании? Может быть, это вполне отвечало бы духу проблемы. Но что может чередоваться? Там чередовались через раз единицы, а в общем случае этого может не быть: там плитки не обязательно однозначно восстанавливаются. Впрочем, если в первой вертикальной линии сплошные единицы (см. рис. 38), то в следующей их нет. А в третьей? Вполне может быть. И вообще, где уловить разли-

10. Живописцы, окуните ваши кисти

	2	2	2	2	
1	3 4	1 4			3
1	2 3	3 1			3
1	2	3			3
	4	4	4	4	

Рис. 38. Чётность количества единиц по вертикали чередуется

цу в вертикальной длине? Если горизонтальная длина чётна, то почему должно существовать какое-то доказательство для нечётной вертикальной длины, не проходящее для чётной? Если и существует, то только за счёт этой разницы: чёт-нечет. Значит, нужно искать нечётное число. Но чего? А может, как раз единиц? А что, идея! Если в первом вертикальном слое нечётное число единиц, то во втором должно быть чётное, а в следующем — опять нечётное: так это и есть нужное нам чередование! Правда, всё это пока бездоказательно, но идея хороша. Попробуем воплотить её в жизнь. Конечно же, вначале убеждаемся на конкретных примерах, что наша догадка о чередовании чёт-нечет действительно разумна (этот этап мы опустим), и лишь после этого находим строгое рассуждение. Примерно такое: в одной вертикальной полосе шириной 1 — нечётное число плиток, следовательно, и нечётное число единиц. Горизонтальные единицы склеиваются по две, а сверху и снизу они отсутствуют. Следовательно, на двух соседних вертикальных линиях — нечётное число единиц. Отсюда и чередование.

Чистку решения мы опускаем, при желании решение можно отыскать в «Кванте» (1984, № 11).

Если в этой задаче нам помогла чётность, то в следующей, наоборот, раскраска помогает установить чётность. Задача была предложена участникам Ленинградской олимпиады.

✦ **Задача.** На клетчатой бумаге нарисован выпуклый пятиугольник с вершинами в узлах, длины всех сторон которого — целые числа. Доказать, что его периметр чётен (сторона клетки равна единице) (рис. 39).

Приведём изящное решение, взятое из книги «Избранные задачи Ленинградских олимпиад», выпущенной для учащихся заочной математической школы и летнего математического лагеря при ЛГУ в 1984—1985 годах.

Решение. Раскрасим узлы в шахматном порядке. Построим на сторонах пятиугольника как на гипотенузах прямоугольные треугольники с катетами, идущими по сторонам клеток, и пройдем последовательно по этим десяти катетам. Так как в конце мы вернёмся в узел, из которого вышли, то пройдем чётное число узлов (при переходе от узла к соседнему цвет узла меняется). Поэтому сумма катетов чётна. Чётность гипотенузы (т. е. стороны пятиугольника) равносильна чётности суммы квадратов катетов, то есть чётности суммы катетов. Отсюда периметр пятиугольника имеет ту же чётность, что и сумма катетов.

Коротко, ясно и очень эффектно! Конечно, первый раз придумать такое решение очень сложно, но когда идея раскраски станет привычной — подобные решения будут приходить в голову сравнительно естественно.

Часто, однако, встречаются миражи методов. Кажется, задача, без сомнения, на этот метод, а действительность разочаровывает: идея решения совершенно иная. Вот пример из этой же книги.

✦ **Задача.** Существует ли одиннадцатигранник, каждая грань которого имеет чётное число рёбер?

Автор потратил несколько часов, раскрашивая то грани, то рёбра, то вершины, будучи твёрдо уверен, что раскраска — эф-

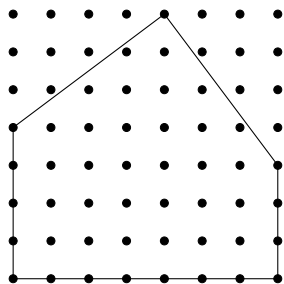
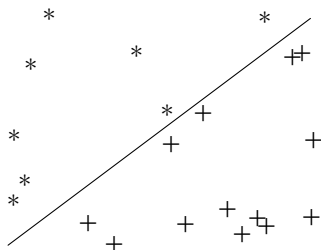


Рис. 39. Вершины пятиугольника в узлах сетки

фективнейший приём решения такого рода задач. А на самом деле... Что было на самом деле, должен понять сам читатель, который решит эту задачу.

Задач о раскраске не сосчитать, и рассказать о них достаточно подробно трудно, потому как по своей непохожести они подобны произведениям искусства. Закончим же мы главу заданием на раскраску.

✦ **Задача.** На плоскости дано k точек (k не меньше пяти). Доказать, что их можно раскрасить в два цвета так, чтобы никакая прямая не могла бы отделить все точки одного цвета от другого, как на рисунке.



Два множества отделены

Вместо решения — маленькая подсказка: докажите, что если никакие три точки не лежат на одной прямой, то найдутся четыре, лежащие в вершинах выпуклого четырёхугольника.

II. Кирпич в луже и таинство перевода

Правда, в голове у меня теперь полно всяких мыслей... только вот о чём они — не знаю!

Л. Кэрролл. Алиса в Зазеркалье

Эта глава — об умении по-новому взглянуть на задачу. Умение это настолько нетривиально, что совершенно непонятно, как ему всё-таки можно научить. Непонятно, впрочем, как вообще можно чему-нибудь *научить*. Ведь самое поразительное в обучении это то, что обучаешься даже тому, чему тебя *никто* не учил. Об этом феномене стоит сказать ещё несколько слов. Надо хорошо себе представить, что процесс обучения вообще, а математике в частности — это отнюдь не равномерный, а скорее скачкообразный процесс. На каждом очередном этапе овладения знанием достигаешь некоторого критического порога, когда уже кажется: «Всё. Больше не могу. Это выше моего понимания. Это вообще невозможно понять». Это всегда очень трудный момент. И всегда, хочется подчеркнуть — *всегда*, причина такого непонимания — неосвоенные мелочи. Каждая новая ступенька знания имеет в своей основе совершенно элементарные технические факты и приёмы. Они хоть и элементарные, но технические. Это значит, что сущность каждого из них (а их много) должна быть тщательно проработана. Только после того, как эта система элементарных знаний и понятий войдёт «в кровь», будут пониматься, а главное, чувствоваться сложные определения и теоремы. Очень хорошо чувствуется этот порог, через который как-то нужно перешагнуть, в анализе. Иногда достаточно уяснить всю глубину понятия предела, чтобы и производная, и интеграл перестали представлять собой проблему. Вот только глубина эта почти неисчерпаема.

Одну из книг по математике автор читал восемь раз. Ни в одном из первых семи ему не удалось продвинуться даже на пятую часть книги, хотя он затрачивал на это поистине титанические усилия. Книга была невероятно сложной. Восьмую попытку отделило от седьмой около четырёх-пяти меся-

цев. За это время было изучено достаточно много материала из совсем других областей математики, так что принципиально ничего нового по содержательной части этой книги не прибавилось. Каково же было удивление автора, когда он открыл книгу в восьмой раз и понял, что она совершенно тривиальна, хотя и написана несколько сжато. Где, как, когда произошло это чудесное превращение? На это ответить невозможно. Можно только сказать, что семикратный труд всё же не прошёл даром: основные понятия «вошли в кровь» и закрепились другими разделами математики, произошёл так называемый рост культуры, математической культуры. И вот это в первую очередь и хотелось подчеркнуть. Читатель! В любой области человеческой деятельности надо стремиться в первую очередь к росту культуры, к пониманию и вчувствованию в мелочи и нюансы, которые определяют всё. И этого достичь можно. У каждого — свои способности и склонности, а значит, у каждого свой путь к достижению культуры (и по времени, и по маршруту), но нет такого знания, которое познано одним человеком и не может быть познано другим. Познанное — познаваемо. Другое дело, что почти нет хороших учебников.

Проницательные читатели уже, наверное, сообразили, что этот монолог — свидетельство беспомощности обучить искусству менять точку зрения. Единственная возможность, которая осталась, это делать, как древние математики — показывать яркий чертёж-иллюстрацию с надписью «Зри!». По этому пути мы и пойдём.

Перед нами задача, причём в нашем распоряжении нет стандартного рецепта, как её решать. Значит, надо напрягать фантазию и, наконец, думать. Но как? Где может зацепиться наша мысль?

Представим себе большую лужу. Ну, не очень большую, но такую, что одним прыжком преодолеть её не удастся. Как же тогда быть? Вот это мы хорошо знаем: надо найти подходящий кирпич, бросить его в середину лужи, и — можно прыгать.

Точно такой же математический кирпич надо отыскать и для нашей математической задачи. Что требуется от такого кирпича? Во-первых, чтобы до него можно было допрыгнуть, во-вторых, чтобы с него уже можно было соскочить на другую сторону. Или, на худой конец, если лужа великовата, чтобы с него можно было швырять кирпичи дальше, так, чтобы обеспечить в конце концов пешеходную дорожку.

Главный признак этого кирпича: сам по себе он нам не нужен, хотя без него мы тоже обойтись не можем. Типичный образец подобного кирпичепроизводства реализован в принципе «бьяки» (см. соответствующую главу): мы заводим новую букву y , через которую выражаем всю задачу, и решаем её в терминах y , получая наконец, что y равен тому-то и тому-то (прыжок на кирпич), и возвращаемся к исходному x (прыжок с кирпича на другую сторону). В результате и в условиях, и в ответе фигурирует только x , а y , который сыграл основную роль, остаётся за кулисами (в процессе чистки решения его удаётся иногда и из решения успешно «изгнать»).

Давайте рассмотрим внимательно следующую типичную задачу, подобную которой тысячами штампуют для абитуриентов.

✦ **Задача.** Выразить $\log_6 80$ через $a = \log_{12} 75$ и $b = \log_{50} 120$.

Поиск решения. На первый взгляд, вроде бы никаких простых формул здесь нет. Зато есть ценный совет: *все логарифмы полезно приводить к одному основанию (пользуясь, если надо, формулой*

$$\log_y x = \frac{\log_c x}{\log_c y},$$

которая легко запоминается: то, что было сверху, остаётся выше, то, что было снизу — ниже).

Попробуем последовать этому совету. Какое выбрать основание? Конечно, 2 — оно чаще всего встречается. Итак, перепишем задачу: выразить $\frac{\log_2 80}{\log_2 6}$ через $a = \frac{\log_2 75}{\log_2 12}$ и $b = \frac{\log_2 120}{\log_2 50}$. Мало-мальский опыт работы с логарифмами подсказывает,

11. Кирпич в луже и таинство перевода

что имеет смысл произвести «очистительные работы»:

$$a = \frac{\log_2 3 \cdot 25}{\log_2 3 \cdot 4} = \frac{\log_2 3 + \log_2 25}{\log_2 3 + \log_2 4} = \frac{\log_2 3 + 2 \log_2 5}{\log_2 3 + 2}.$$

Точно так же

$$b = \frac{3 + \log_2 3 + \log_2 5}{1 + 2 \log_2 5}.$$

А найти требуется $\frac{4 + \log_2 5}{1 + \log_2 3}$. И вот теперь, хотя на вид задача стала более громоздкой, она проясняется — видно, что два кирпича, которые нам так нужны, это $x = \log_2 3$ и $y = \log_2 5$. Действительно, если мы их знаем, то знаем и ответ, который будет равен $\frac{4+y}{1+x}$ (как сойти с кирпичей, уже понятно). Но уже становится понятным, как добраться до самих кирпичей. По условию,

$$a = \frac{x+2y}{x+2}; \quad b = \frac{3+x+y}{1+2y},$$

а это не что иное, как система уравнений на x и y . Решая её, мы вычисляем x и y через a и b , а это и есть нужный нам этап пути.

Разумеется, довести решение до конца — прерогатива читателя, а мы займёмся анализом и выводами.

Прежде всего отметим, что и x и y нам понадобились только временно, а в окончательный ответ они не вошли, но их помощь оказалась существенной, так как просто угадать ответ было бы затруднительно. Кстати сказать, отыскать x и y было делом тоже нетривиальным. Просто оно было стандартным, потому и прошло сравнительно легко.

Подметим также, как удачно мы «сделали вид» и получили систему относительно x и y . Не должен выпасть из поля зрения ценный и поучительный шаг стандартизации — в данном случае приведения к одному основанию. Наконец, самый важный момент. Был осуществлён *перевод*. Пожалуй, это — наиболее принципиальное действие: вместо того чтобы решать задачу в исходных терминах, мы перевели её на новый

язык. При этом она стала более понятной, потому что данный язык более приспособлен для её решения. Если угодно, можно сформулировать это так:

ПРИНЦИП ПЕРЕВОДА.

Для каждой задачи существует оптимальный язык, на котором её следует решать. Важнейший этап решения задачи — поиск такого языка и последующий перевод.

Не обязательно, чтобы задача сразу решалась. Достаточно, чтобы она стала легче (одного кирпича может и не хватить). Более того, хорошо, даже если мы просто увидим задачу с другой стороны (мы можем найти и не тот кирпич, зато понять, куда нужно кидать следующий).

Несколько утрируя ситуацию, можно сказать, что вся математика в принципе основана на умении создавать новые языки и разработке технических средств в каждом из этих языков. (Отметим, что по такому же пути пошло и программирование.) Действительно, о чём же шла речь во всех главах этой книги, если не об искусстве перевода. Что иначе представляет собой метод окраски или метод минимального контрпримера, если не умение создавать новые точки зрения.

По аналогии с обычными и программистскими языками следует чётко разделить три уровня владения языком.

Уровень пассивного владения. Это когда вы можете понять решение, написанное на данном языке.

Уровень активного владения. Это когда вы сами можете решать задачи, пользуясь данным языком. Между этими уровнями — огромный промежуток. Одно дело прочитать (пусть даже длинное и сложное) доказательство и совсем другое — провести самостоятельно хотя бы маленькое доказательство. Пассивного уровня достигают, слушая лекции и читая книги, активного — решая задачи и упражнения.

Кстати, большой недостаток задачника — приведённые решения, так как слабовольного читателя они наводят на приятное пассивное овладение предметом. Правда, хорошие ре-

шения — это также большое преимущество: чтобы научиться решать, надо иметь хоть какие-то образцы.

Есть ещё третий, высший, уровень, который можно назвать творческим. Это когда создаётся сам язык: выдвигаются новые понятия и концепции. Каждый такой язык, каждая новая точка зрения — это новый шаг в математике.

Изложению тех или иных языков, по существу, посвящена вся книга, а в этой главе мы немного поговорим о выборе и переводе.

Вначале о переводе. На самом деле, не так просто чётко сформулировать, что значит перевести на другой язык. Попробуем сделать это на примере задач про прогрессию. Метод решения 98% таких задач чётко укладывается в следующий совет.

Все условия задачи следует выразить через первый член и разность (для геометрической прогрессии — знаменатель), а если неизвестно число членов, то иногда и через n — их количество. В результате должна получиться система уравнений. Решая её, находим эти величины и смотрим, что спрашивается в задаче. Что бы ни спрашивалось, через вычисленные неизвестные это найти можно.

Основывается этот совет на простом наблюдении: через первый член a_1 , разность d (или знаменатель q) и число n можно выразить любое понятие из области арифметических и геометрических прогрессий.

Удобно вообразить себе следующую картину. Перед вами представитель племени, в языке которого только три понятия: a_1 , d , n , — да ещё арифметические знаки (вообще арифметика). Вы должны ему объяснить условия задачи на его языке. Как только вы это сделаете — получите систему уравнений для нахождения ваших основных кирпичей a_1 , d , n . Переводить можно свободно: предложение за предложением, и, если вы ещё не твёрдо знаете язык, со словарём, т. е. предварительно просмотрев все «незнакомые слова» и переведя их. Приведём один совершенно стандартный пример.

✦ **Задача.** Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 12, а сумма квадратов её членов — 48. Найти сумму первых десяти членов этой прогрессии.

Поиск решения. Задача стандартная. Значит, сразу вводим a_1 — первый член и q — знаменатель прогрессии. Работаем со словарём. Насчёт суммы бесконечной прогрессии проблем с переводом нет. По формуле из учебника она равняется $\frac{a_1}{1-q}$. Значит, часть первого предложения до запятой переводится для нашего туземца так: $\frac{a_1}{1-q} = 12$. Сумма квадратов — это «незнакомое слово», готовой формулы нет. С другой стороны, это бесконечная сумма, а мы кроме бесконечной геометрической прогрессии других бесконечных сумм не проходили в школе. Видать, это тоже должна быть прогрессия. Допустим, что так (докажем позже). Первый член её понятен — a_1^2 . А знаменатель? По аналогии должно быть q^2 . А почему? Да, а что такое знаменатель? Это отношение соседних членов. Например, второй член разделить на первый или третий на второй и так далее. В нашем случае второй член $(a_1q)^2$. Делим на первый и получаем то, что и требовалось, — q^2 . Для контроля третий делим на второй: $(a_1q^2)^2 / (a_1q)^2 = q^2$. Отлично! Заодно готово доказательство, что квадраты — это тоже геометрическая прогрессия, потому что отношение каждого к предыдущему — постоянное число. Надо только это слегка подчистить с точки зрения строгости индукцией или как-нибудь ещё. Ладно, это потом. Окончим перевод первого предложения. На туземном языке получаем $\frac{a_1^2}{1-q^2} = 48$. Всё, получили систему уравнений. Немедленно решим её хотя бы подстановкой a_1 из первого уравнения во второе. Находим

$$\frac{[12(1-q)]^2}{1-q^2} = 48 \Rightarrow q = \frac{1}{2} \Rightarrow a_1 = 6.$$

А теперь можно посмотреть, и что спрашивается. Ну, здесь перевод простой: спрашивается сумма 10 членов геометриче-

ской прогрессии. Это сразу находим по формуле

$$S_{10} = a_1 \frac{1 - q^{10}}{1 - q} = \frac{3069}{256}.$$

Конечно же, чистить решение мы не будем. Отметим только некоторые моменты. Технические трудности могут возникнуть в трёх местах. Во-первых, при переводе слов (как в данном примере с квадратами). Во-вторых, при решении системы уравнений. Не исключено, что найти числовые значения a_1 , q не удастся, но удастся получить только связь между ними, которая обеспечит нужное сокращение при подстановке в ответ (образец: найти знаменатель бесконечно убывающей прогрессии, зная, что её сумма вдвое больше суммы первых k членов). И, в-третьих, иногда надо ещё догадаться, что задача — на прогрессию. Немало абитуриентов оказались шокированы задачей, в которой им просто предлагалось разделить два числа: 8,0(48) и 0,0(04) (числа в скобках означают, конечно же, период бесконечной десятичной дроби). И те, кто не сообразил, что имеют дело с двумя прогрессиями (точнее, с одной прогрессией и одной почти прогрессией — почему?), не досчитались баллов.

А теперь поговорим о тонком искусстве поиска нужного языка. Уже последний пример на деление показывает важность владения этим искусством. Основное здесь — быть полиглотом, но это не всё. А что ещё, будет видно, хочется надеяться, из дальнейшего достаточно сложного примера, в котором честно продемонстрированы мучительные поиски нужного языка. Уровень изложения будет довольно высоким. Поэтому можно при первом чтении непонятные места пропускать, стараясь уловить только процесс рождения основной идеи, более тщательно прочитав только отступление в сторону о симметрии, написанное более доступным языком.

✦ **Задача.** Указать какую-либо пару натуральных чисел (a, b) , такую, что:

1. Число $ab(a + b)$ не делится на 7.

2. Число $(a + b)^7 - a^7 - b^7$ делится на 7^7 .

Ответ обосновать (Международная математическая олимпиада, 1984 год).

Поиск решения. Здесь будет приведён настоящий поиск, проведённый самим автором непосредственно перед написанием этой главы (даже, можно сказать, во время её написания), правда, конечно, без судорог и метаний, свойственных всякому поиску.

Во-первых, можно попробовать поперебирать. Прямой перебор — это занятие для трудолюбивых, но не слишком полезное. Желательно хотя бы осмыслить перебор. Прежде всего, ясно, что надо переходить на работу с остатками. Только вот при делении на что? Остатки при делении на 7 как-то мало интересны. По малой теореме Ферма (см. упражнения в конце книги), $a^7 \equiv a(7)$; $b^7 \equiv b(7)$; $(a + b)^7 \equiv a + b(7)$ (обозначения см. в главе об остатках), так что всё это выражение на 7 и так делится. Интересно попробовать остатки при делении на 49. По формуле бинома Ньютона (для тех, кто её не знает, — после раскрытия скобок),

$$(\alpha + 7k)^7 = \alpha^7 + 7\alpha^6 \cdot 7k + 7^2(\dots),$$

так что седьмая степень любого числа A имеет при делении на 49 тот же остаток, что и седьмая степень остатка A при делении на 7. Таким образом, возможны остатки седьмых степеней только следующего вида: 0, 1, 30, 31, 18, 19, 48 (от 0^7 , 1^7 , ..., 6^7). Считать надо, собственно, только остатки 2^7 и 3^7 , а остальные по формуле $(7 - a)^7 \equiv -a^7 \equiv (49 - a^7)$. Теперь составим таблицы. Первая — таблица сложения остатков при делении на 7:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	0
2	3	4	5	6	0	1
3	4	5	6	0	1	2
4	5	6	0	1	2	3
5	6	0	1	2	3	4
6	0	1	2	3	4	5

11. Кирпич в луже и таинство перевода

Теперь строим таблицу, в которой на пересечении столбцов и строк x и y стоят значения остатков $(x + y)^7$ при делении на 49. Получаем эту таблицу, просто заменяя в предыдущей таблице каждое число на остаток его седьмой степени:

	1	2	3	4	5	6
1	30	31	18	19	48	0
2	31	18	19	48	0	1
3	18	19	48	0	1	30
4	19	48	0	1	30	31
5	48	0	1	30	31	18
6	0	1	30	31	18	19

Наконец, построим таблицу для $x^7 + y^7$ (в соответствии с законами сложения остатков при делении на 49 слева и снизу для удобства указаны остатки седьмых степеней):

		1	2	3	4	5	6
(1)	1	2	31	32	19	20	0
(30)	2	31	11	12	48	0	29
(31)	3	32	12	13	0	1	30
(18)	4	19	48	0	36	37	17
(19)	5	20	0	1	37	38	18
(48)	6	0	29	30	17	18	47
		1	30	31	18	19	48

Теперь мы легко выловим возможных кандидатов — они имеют следующие остатки при делении на 7: (1, 2), (1, 4), (2, 4), (3, 5), (3, 6), (5, 6). Именно в этих местах таблицы совпадают, так что вопрос о делимости на 7^2 мы полностью разрешили. К сожалению, их слишком много, чтобы смело начать делать второй шаг — искать возможных кандидатов при делении на 7^3 . Точнее, ясно, что перебор мы значительно сократили, и, в принципе, следующий шаг уже осуществим, но он пока выглядит чересчур трудоёмким. Значит, прежде чем решиться на него, надо обдумать другие возможные переводы задачи.

Что значит «делится на 7^7 »? Вот если бы на 10^{10} , так это просто — десять нулей в конце, и все проблемы долой! О! Так

11. Кирпич в луже и таинство перевода

ведь обязательно нужно всё перевести в семеричную систему счисления. На языке семеричной системы делимость на 7^7 — это очень простой факт: последние семь цифр должны быть нулями. Но окупится ли переход в семеричную систему? Пожалуй, да. Сложный вопрос о делимости заменится вопросом о наличии нулей, а сложение станет наглядным: будет виднее, что нужно складывать, чтобы добиться нужного результата.

Теперь технический вопрос: как переводить в семеричную систему? Есть два пути: первый — быстро создать таблицу умножения в семеричной системе. Это, пожалуй, в любом случае не помешает (читатель, попробуй сам и сравни):

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	11	13	15
3	3	6	12	15	21	24
4	4	11	15	22	26	33
5	5	13	21	26	34	42
6	6	15	24	33	42	51

Второй путь — переводить степени из десятичной системы в семеричную. Приступим. Начнём с $2^7 = 128$. Делим с остатком: $128 = 7 \times 18 + 2$. Значит, последняя цифра — 2. Далее: $18 = 7 \times 2 + 4$. Получили предпоследнюю цифру 4 и первую 2. Итак, $128_{10} = 242_7$. Точно так же 3^7 запишется как 6243_7 . Теперь действительно видно, что $(1 + 2)^7 - 1^7 - 2^7$ делится на 7^3 (в семеричной разности получится 6000_7), но делимости на 7^4 уже нет. Эту работу можно продолжить. Видно, что она — хорошее подспорье к тому, что мы уже нашли, но не понятно ещё, как окончить эту задачу. Опять же, прежде чем продолжать поиски, надо ещё раз продумать ситуацию: всё ли мы использовали? Интересный вопрос: а как ещё можно было бы доказать делимость на 7 без малой теоремы Ферма? Ну, например, взять и непосредственно раскрыть скобки — обязательно должно было бы получиться. Это будет просто одним из свойств многочленов. Многочлены, многочлены... Что-то вер-

тится в голове знакомое. А, наверное, это — симметрические многочлены!

Сделаем, читатель, отступление в сторону и расскажем о важном техническом приёме, особенно ценном для абитуриента, но немаловажном и для опытного математика. Речь пойдёт о симметрических многочленах. Сначала — что это такое. Определение несложное: многочлен от x и y называется симметрическим, если, поменяв в нём местами буквы x и y , мы всё равно получим тот же многочлен. Например, $x^3 + xy + y^3$ — симметрический, а $x^2 + y$ — нет. Имеется два простейших симметрических многочлена: $u = x + y$ и $v = xy$. Они называются элементарными. Решающую роль в методе играет важная

ТЕОРЕМА. *Любой симметрический многочлен можно выразить через элементарные симметрические.*

Метод же состоит в следующем. Как только вы увидели, что в вашей задаче присутствуют только симметрические многочлены, вы обязаны немедленно ввести обозначения $u = x + y$ и $v = xy$ и выразить всю задачу через них. Метод гарантирует, что хуже не станет, так как степень уравнений должна понизиться, ибо мы вводим обозначение второй степени. Немедленно приведём стандартный закрепляющий пример (не будем обращать внимания на то, что мы ещё не разобрали основную задачу — очень уж метод важный).

✦ **Задача.** Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} A^2 + B^2 = 13; \\ A^3 + B^3 = 19. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Моментально вводим обозначения: $U = A + B$ и $V = AB$. Теорема гарантирует, что через них всё можно выразить. Как это сделать? Нетрудно видеть, что $U^2 = (A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$, т. е. $A^2 + B^2 = U^2 - 2V$. С суммой кубов поступим аналогично: по формуле для суммы кубов

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 + B^2 - AB) = U(U^2 - 3V).$$

Таким образом, мы получили систему уравнений:

$$\begin{cases} U^2 - 2V = 13; \\ U(U^2 - 3V) = 19. \end{cases}$$

Решая её, подставляем V из первого уравнения во второе и получаем кубическое уравнение, один корень которого легко угадывается — это $U = 1$ (остальные определяются после понижения степени уравнения путём разложения на множители). Находим U, V , а по ним — уже сразу A и B .

Заметив, что метод симметрических функций применим и для бóльшего числа переменных (для K переменных нужно K элементарных симметрических функций, которыми могут служить коэффициенты при t^i в разложении многочлена $(t+x)(t+y)(t+z)\dots$ по степеням t), читатель получит в своё распоряжение мощный метод решения задач и от бóльшего числа переменных, входящих в уравнения симметрично. Мы же вернёмся к прерванной на время задаче. Установив, что она симметрична, мы должны использовать элементарные симметрические функции. Итак, вводим: $u = a + b$, $v = ab$. Надо нам выразить через них $(a + b)^7 - a^7 - b^7$. Воспользовавшись формулой бинома Ньютона, мы представим наше выражение в виде

$$\begin{aligned} 7a^6b + \binom{7}{2}a^5b^2 + \binom{7}{3}a^4b^3 + \binom{7}{4}a^3b^4 + \binom{7}{5}a^2b^5 + \binom{7}{6}ab^6 = \\ = 7ab(a^5 + b^5) + 21a^2b^2(a^3 + b^3) + 35a^3b^3(a + b). \end{aligned}$$

Теперь предварительно следует решить, каким образом можно выразить через элементарные функции сумму $a^5 + b^5$. Самый простой путь — использовать уже полученные в предыдущей задаче выражения для суммы квадратов и суммы кубов и рассмотреть их произведение:

$$(a^2 + b^2)(a^3 + b^3) = a^5 + b^5 + a^2b^3 + a^3b^2 = a^5 + b^5 + a^2b^2(a + b),$$

откуда

$$a^5 + b^5 = (u^2 - 2v)u(u^2 - 3v) - v^2u = u[u^4 - 5u^2v + 5v^2].$$

11. Кирпич в луже и таинство перевода

Теперь наше выражение приводится к виду

$$7uv[u^4 - 5u^2v + 5v^2] + 21v^2u(u^2 - 3v) + 35v^3u = 7uv[u^4 - 5u^2v + 5v^2 + 3vu^2 - 9v^2 + 5v^2] = 7uv(u^4 - 2u^2v + v^2) = 7uv(u^2 - v)^2.$$

Вот это уже то, что нам надо! Мы можем сделать основополагающий вывод: для того чтобы исходное выражение делилось на 7^7 , необходимо и достаточно, чтобы делилось на 7^3 выражение $u^2 - v$. Это уже вполне можно решить прямым перебором. Попробуем, однако, ещё больше его сократить. Прежде всего вернёмся к нашим исходным буквам a и b . Тогда мы приходим к такому выводу: наши буквы должны быть таковы, чтобы $a^2 + ab + b^2$ делилось на 7^3 . Хорошо? Хорошо, но можно лучше: можно, чтобы разность кубов $a^3 - b^3$ делилась на 7^3 . А вот это уже совершенно понятный перебор — короткий и ясный. Надо только выписать кубы. Конечно же, используя накопленный опыт предыдущих идей, мы будем выписывать не только десятичные, но и семеричные разложения чисел — кубов. Вот таблица первых 20 кубов в десятичной и в семеричной системе счисления:

1	1	1
2	8	11
3	27	36
4	64	121
5	125	236
6	216	426
7	343	1000
8	512	1331
9	729	2061
10	1000	2626
11	1331	3611
12	1728	5016
13	2197	6256
14	2744	11000
15	3375	12561
16	4096	14641

11. Кирпич в луже и таинство перевода

17	4913	20216
18	5832	23001
19	6859	25666
20	8000	32216

Теперь осталась очень простая задача по перебору — смотреть, у каких пар чисел одинаковые последние цифры (их три). Прикинуть можно довольно-таки быстро: это будут пары чисел (1, 18) и (17, 20). Поскольку нам нужна всего одна такая пара чисел, задача полностью решена.

Но возникает естественный вопрос: а нельзя ли найти все такие пары чисел? Что ж, и это сделать можно, причём довольно-таки быстро. Прежде всего, понятно, что если одна пара образует решение, то добавление к ней чисел, кратных 7^3 (к каждому числу пары можно добавлять своё кратное), тоже даёт подходящую пару. Таким образом, мы обязаны отыскать только те пары, где каждое из чисел меньше 7^3 . Но и это ещё не всё. Заметим, что любую пару можно умножить на любое число и получить тоже хорошую пару. Например, не считая, мы можем заявить, что (2, 36) — это тоже хорошая пара. Так как числа мы рассматриваем только взаимно простые с 7, то можно и «делить» (в арифметике остатков). Вывод: достаточно отыскать только те пары, в которых первым числом является единица. Но и тут перебор нужен неполный. Ранее проведённое исследование об остатках при делении на 7^2 показывает, что второе число обязано иметь остаток при делении на 7, равный 2 или 4. Теперь перебор совсем сокращён. Последнее техническое замечание: при вычислении кубов в семеричной системе счисления надо следить только за последними тремя цифрами. Тогда за разумное время можно найти все возможные варианты второго числа. Кроме 18 это ещё 324. Тем самым общий ответ записывается так:

$$\begin{cases} a = k + 343l; \\ b = 18k + 343n; \end{cases} \quad \begin{cases} a = k + 343l; \\ b = 324k + 343l. \end{cases}$$

11. Кирпич в луже и таинство перевода

Автор должен заметить, что сам он, однако, степени не считал, перепоручив это машине (программа составлялась не более 15 минут и потребовала около 30 строк на языке Бейсик).

Хочется верить, что из приведённого решения видно, как рождаются разнообразные подходы к задаче и как, в конце концов, они успешно комбинируются для получения решения. Конечно же, в процессе оформления (чистки) почти всё это исчезает и остаётся короткое изящное решение, до которого, быть может, и можно додуматься сразу. Казалось бы, только и нужно, что правильно поставить вопрос. Но, как справедливо заметил Роберт Шекли в своём рассказе «Верный вопрос»: «Чтобы правильно задать вопрос, нужно знать большую часть ответа».

Рассмотрим теперь ещё одну задачу, в которой проявляется нетривиальное искусство перевода.

✦ **ЗАДАЧА.** Последовательности A_k и B_k строятся по следующему закону:

$$A_1 = 1, \quad B_1 = \sqrt{2};$$
$$A_{k+1} = \min(A_k, B_k), \quad B_{k+1} = |B_k - A_k|.$$

1. Доказать, что A_k отлично от нуля при всех k .
2. Доказать, что последовательность A_k стремится к нулю.
3. Доказать, что последовательность

$$C_k = (A_1)^2 + (A_2)^2 + (A_3)^2 + \dots + (A_k)^2$$

имеет предел, и найти этот предел.

В этой задаче мы не будем проводить поиск решения, а сразу приведём чистое решение. Зато будет объяснено, как эта задача придумывалась.

РЕШЕНИЕ 1. Разумеется, надо сыграть на иррациональности. Кратчайший путь такой: доказать по индукции, что отношение $B_k : A_k$ — число иррациональное. Более строго, по индукции будут доказаны сразу два утверждения: что A_k не равно нулю и что указанное отношение иррационально. (Утвержде-

ние о неравенстве нулю необходимо для того, чтобы мы имели право говорить о частном. Про несуществующий объект можно ведь доказать что угодно.)

База индукции очевидна: при $k = 1$ оба утверждения не подлежат сомнению. Индукционный переход трудностей также не составляет. Итак, предположим, что для некоторого k утверждение уже доказано. Наша задача — вывести аналогичное утверждение для $k + 1$. Прежде всего сформулируем, что именно требуется доказать. Нужно убедиться, что A_{k+1} не равно нулю, а отношение $B_{k+1} : A_{k+1}$ иррационально. При этом разрешается пользоваться, как доказанным, утверждением о том, что A_k не равно нулю и о том, что отношение $B_k : A_k$ иррационально. Приступаем к доказательству. Прежде всего заметим, что B_k не равно нулю (иначе требование иррациональности $B_k : A_k$ оказалось бы нарушенным). Теперь попробуем посмотреть, что из себя представляет A_{k+1} . Это либо B_k , либо A_k — в зависимости от того, что из них меньше. В любом случае равенство нулю невозможно: про B_k только что доказали, а про A_k известно из индукционного предположения. Так что первая часть доказана. Докажем вторую часть — об иррациональности. Так как $B_{k+1} = \pm(B_k - A_k)$, то мы должны убедиться в иррациональности отношений $(B_k - A_k) : B_k$ и $(B_k - A_k) : A_k$. Но отняв единицу от первого выражения и прибавив единицу ко второму, мы всё сведём к вопросу о рациональности выражений $A_k : B_k$ и $B_k : A_k$ соответственно. Но и то и другое выражение иррационально согласно предположению индукции. Тем самым наше утверждение окончательно доказано.

2; 3. Эти пункты будут доказываться одновременно. Решение будет неожиданно коротким после следующего красивого перевода. Рассмотрим прямоугольник со сторонами A_1 и B_1 . Для удобства нарисуем его в системе координат так: отметим точку с координатами (B_1, A_1) и проведём через неё прямые, параллельные осям координат. В результате получится прямоугольник с нужными нам сторонами. Меньшая его сторона будет по определению равняться A_2 . Отсечём от прямоуголь-

и суммой

$$(A_2)^2 + (A_3)^2 + (A_4)^2 + \dots + (A_k)^2$$

стремится к нулю. Убедимся в этом. Во-первых, она монотонно убывает. Во-вторых, что она из себя представляет? Это — площадь прямоугольника со сторонами A_{k+1} , B_{k+1} . Так как первая величина стремится к нулю, а вторая ограничена, то, следовательно, и площадь стремится к нулю, что и требовалось доказать.

Комментарии. Конечно, можно было бы продемонстрировать поиск решения. Ясны даже первые шаги: взять в качестве начального значения два целых числа и посмотреть, как устроена последовательность. На самом же деле в таком порядке задача придумывалась. Дело, вообще говоря, обстояло так: читая книгу Дейкстры о программировании, автор встретился с этим замечательным алгоритмом. Использовался он... для нахождения наименьшего общего делителя двух натуральных чисел. (Проведя несколько пробных испытаний, читатель сам поймёт, как его искать, пользуясь указанными последовательностями.) Алгоритм хорошо интерпретировался геометрически, и автору пришлось в голову попытаться понять, а что будет в случае иррациональности. Когда картинка была нарисована, осталось только придумать, что спрашивать в этой задаче. Самым симпатичным показалось суммирование квадратов. Потом возник вопрос о строгом доказательстве — и на свет появились пункты 1, 2. Затем каждый из них пришлось решить, так как в книге Дейкстры, конечно же, никакого намёка на такие задачи не было. Вот, собственно, и вся история. На этом можно было бы и закончить, если бы, когда книга уже писалась, автору не пришёл в голову ещё один неожиданный поворот.

Вопрос, породивший это новое направление размышлений, следующий: а нельзя ли заранее точно указать, сколько именно квадратиков нужно для насыщения в очередной серии заполнения прямоугольников (вертикальной или гори-

зонтальной). Тот же вопрос в алгебраической интерпретации звучал так: нельзя ли заранее указать те места, где A_k не равно A_{k+1} . Начнём с натуральных чисел: пусть первая пара (12, 42). Тогда последовательность пар (A_k, B_k) будет дальше выглядеть так: (12, 30), (12, 18), (12, 6), (6, 6), (0, 6) — и дальше стабилизация. Итого: 12 повторилось трижды, 6 и 0 — по разу. Не записать ли эту последовательность? Имеем: 3, 1, 1. Где-то такие последовательности встречались (во всяком случае — автору). Где же? Ещё один толчок — наблюдение, которое показывает, что чертёж может быть увеличен или уменьшен гомотетией. Этому отвечают умножения или деления исходной пары на одно и то же число. Скажем, пара (24, 48) всё равно приведёт к такому же результату: последовательности 3, 1, 1. Это можно выразить так: указанная последовательность зависит только от отношения $B_1 : A_1$. Это что-то жгуче напоминает. Где строится последовательность натуральных чисел исходя из одного данного числа, причём оказывается конечной, если это число рационально, и бесконечной, если иррационально? Ну конечно же, именно там — в цепных дробях!

Напомним читателю, как они выглядят. Например, наша последовательность 3, 1, 1 отвечает такой цепной дробью:

$$3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}$$

а более длинная последовательность 3, 3, 7, 4 отвечает дробью

$$3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{4}}}$$

Эти примеры, хочется верить, ясно объясняют, как строить цепную дробь по последовательности. Самое же замечательное в том, что если сосчитать первую дробь (по обычным правилам арифметики), то мы получим $7/2$, т. е. как раз $42/12$.

Вывод: последовательность длин серий квадратов в точности отвечает разложению числа $B_k : A_k$ в цепную дробь. (Автор не претендует на то, что он уже доказал. Более того, задачу строгого доказательства автор оставляет читателю в качестве очень полезного рассуждения — польза проявится в том, что он поймёт, как непросто записывать доказательства совершенно понятных вещей.) Но раз так, то мы уже можем ответить на все интересующие нас вопросы, как только научимся разлагать $\sqrt{2}$ в цепную дробь — она, конечно, окажется бесконечной. Разложение такое хорошо известно:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

Доказать это можно очень изящно: если обозначить цепную дробь, стоящую справа, через X , то легко видеть, что X удовлетворяет уравнению $X - 1 = \frac{1}{X + 1}$, решения которого суть $\pm\sqrt{2}$. (Отметим, впрочем, что это — нестрогое доказательство, потому что задействована бесконечность. Строгое требует обоснования из теории пределов.)

Вывод. В нашей исходной задаче процесс построения квадратов будет идти так: один квадратик располагается горизонтально, затем два — вертикально, затем два — горизонтально, затем опять два — вертикально и так далее.

Нашей целью не является изложение красивого и мощного аппарата цепных дробей. Прочитать о них можно в разных книгах, например, в книге А. Я. Хинчина «Цепные дроби», и почти в любом учебнике по теории чисел. Пусть читатель сам попробует разложить в цепную дробь корень из трёх и корень кубический из двух — в награду за это он получит их наилучшие приближения. Мы же хотели только подчеркнуть, как красиво и неожиданно могут переводиться задачи.

Следующий пример был предложен на Всесоюзной математической олимпиаде 1984 года.

✦ Задача. Положительные числа x , y , z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25; \\ \frac{y^2}{3} + z^2 = 9; \\ z^2 + zx + x^2 = 16. \end{cases}$$

Вычислите величину $xy + 2yz + 3zx$.

Поиск решения. С первого взгляда такая система не производит эстетического впечатления: трудно даже придумать, за что тут можно уцепиться. Попытки решить систему в лоб мы опустим. Может, что-то обозначить? Явно напрашивается на обозначение $y/\sqrt{3}$, хотя непонятно, что это может дать, кроме чистого удовлетворения тем, что все квадраты будут без коэффициентов. Непонятно, но сделать надо — и записать! Итак, вводим новую переменную $t = y/\sqrt{3}$ и получаем такую систему:

$$\begin{cases} x^2 + \sqrt{3}xt + t^2 = 25; \\ t^2 + z^2 = 9; \\ z^2 + zx + x^2 = 16. \end{cases}$$

Что с ней можно сделать? Не видно по-прежнему. Давайте тогда посмотреть, что есть знакомого. Знакома комбинация 9, 16, 25 — египетский треугольник. Но зачем он нам? А что делать с $\sqrt{3}$? Где вообще такая величина хоть как-то встречается? Ну разве что в тригонометрии. Косинус 30° вроде бы равняется $\sqrt{3}/2$. А зачем нам это? Ладно, смотрим ещё. Выделяется второе уравнение: сумма квадратов даёт третий квадрат. И ещё одно такое же равенство мы уже отмечали — в египетском треугольнике: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Интересно, а что, если это геометрически проинтерпретировать? Нельзя ли перевести задачу на геометрический язык? Попробуем. Значит, есть два треугольника, у которых одна общая сторона длиной 3. Как их

11. Кирпич в луже и таинство перевода

нарисовать: один внутри другого или снаружи? Попробуем внутри, чтобы попробовать связать с другими сторонами

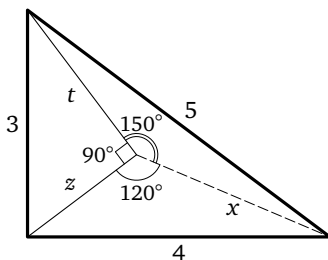


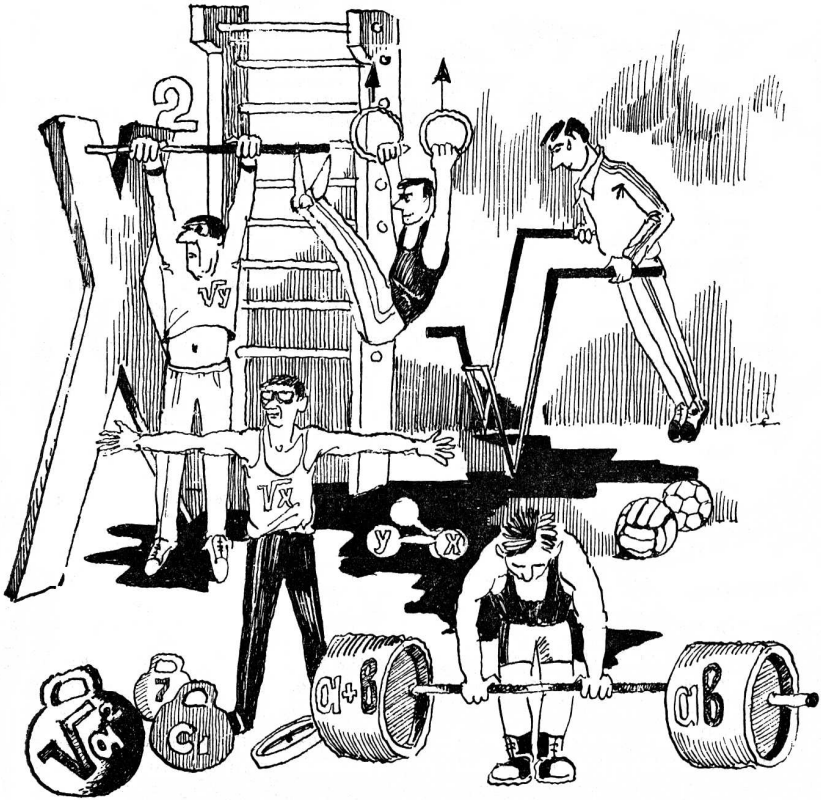
Рис. 41. Геометрическая интерпретация системы уравнений

(рис. 41). А что, интересно получилось. А не дадут ли два оставшихся уравнения что-то подобное? Так ведь они... теорема косинусов в чистом виде. А с какими углами? Косинусы равны $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $-\frac{1}{2}$. Но сумма углов тогда в точке O получится в точности 360° . Прекрасно! Значит, догадка оказалась верной — чертёж соответствует нашей задаче. А теперь осталось выяснить, что спрашивается в задаче с геометрической точки зрения. А спрашивается, как читатель сам легко убедится, — площадь большого треугольника с точностью до коэффициента. Ответ $-24\sqrt{3}$.

В этой главе можно было бы написать о многом. Например, о замечательном переводе задачи про разрезание квадрата на неравные меньшие в задачу об электрических цепях и законах Кирхгофа (об этом, впрочем, замечательно написано в книге М. Гарднера «Математические головоломки и развлечения»). Или... Но объём каждой книги и тем более главы ограничен, так что мы должны проститься с этой увлекательной темой.



ТРЕНАЖЁР



В задачах тех
Ищи удачи,
Где получить
Рискуешь сдачи.

П. Хейн. Груки

Эта глава — тренировочная. Она предназначена для тех, кто решил начать подготовку к математической олимпиаде. Сборников задач олимпиадного характера достаточно много. Но их всё равно не хватает, тем более, что переиздаются они редко, а школьников, открывающих для себя олимпиадную математику, становится всё больше.

Особенность главы «Тренажёр» в том, что она состоит только из задач. Рекомендуется рассматривать задания — по 10 подряд идущих задач — на две недели. В каждой десятке задачи более или менее объединены по смыслу, и в каждой имеются задачи от очень простых до очень сложных. Большая часть задач хорошо известна, но есть и совершенно новые. Не беда, если какие-то задачи не будут получаться. Часть из них потом всё равно решится, часть будет найдена в каком-нибудь другом сборнике, а часть..., может быть, будет решена в следующей книге автора (если он таковую напишет). А теперь приступим к изложению задач.

1. Доказать, что для каждого натурального числа k существует число, составленное только из единиц и нулей и делящееся на k .

2. Доказать, что из $k + 1$ числа, меньшего $2k$, всегда можно выбрать два, отношение которых — степень числа два, и всегда можно выбрать три числа, одно из которых равно сумме двух других.

3. На шахматной доске 8×8 стоит 31 пешка. Доказать, что найдётся «уголок», склеенный из трёх клеток, на котором не стоит пешка.

4. Вокруг каждой точки с целочисленными координатами нарисована одинаковая окружность. Доказать, что, каким бы маленьким ни был взят радиус этой окружности, любая

12. Тренажёр

прямая, проходящая через начало координат, пересечёт бесконечно много окружностей.

5. Доказать, что существует степень двойки, начинающаяся 1986 девятками.

6. Шахматист играет для тренировки не менее одной партии в день. При этом, чтобы не переутомиться, он играет не более 12 партий в неделю. Доказать, что найдётся несколько последовательных дней, в течение которых он сыграет ровно 20 партий.

7. В единичный квадрат бросили 51 точку. Доказать, что некоторые три из них лежат в круге радиусом $1/7$.

8. Даны 20 различных натуральных чисел, не больших 70. Доказать, что среди всевозможных попарных разностей этих чисел найдётся по крайней мере четыре равных. Можно ли уменьшить число 20 в этой задаче?

9. Доказать, что из 11 различных бесконечных десятичных дробей можно выбрать две такие, которые совпадают в бесконечном числе разрядов.

10. Имеется неограниченное число кубиков чёрного и белого цвета. Нужно построить из них сплошную башню в форме параллелепипеда так, чтобы каждый чёрный кубик в башне граничил с чётным числом белых, а каждый белый — с нечётным числом чёрных. При любом ли заданном слое такую башню (конечной высоты) можно построить?

11. На доске написаны числа $1, 2, \dots, 1985$. Разрешается стереть любые два, записав вместо них абсолютную величину их разности. Доказать, что нельзя добиться, чтобы на доске остался один нуль.

12. В k стаканах достаточно большой вместимости налито поровну воды. Разрешается переливать из любого стакана в любой другой столько воды, сколько имеется в этом последнем. При каких k можно за конечное число шагов слить всю воду в один стакан?

13. В ряд выписаны 2^k натуральных чисел. Известно, что если выписать все простые множители этих чисел, то среди

них будет не более k различных. Доказать, что из данного ряда можно выбрать несколько стоящих подряд чисел так, что их произведение будет точным квадратом.

14. Даны двадцать карточек, на каждой из которых написана одна цифра (0, 1, 2, ..., 9), причём каждая цифра написана на двух карточках. Можно ли расположить эти карточки в ряд так чтобы нули лежали рядом, между единицами лежала ровно одна карточка, между двойками — две и так далее до девяток, между которыми должно лежать девять карточек?

15. Каждый человек, когда-либо живший на Земле, сделал определённое число рукопожатий. Доказать, что число людей, сделавших нечётное число рукопожатий, чётно.

16. Каждый из 77 человек, сидящих за круглым столом, задумал по целому числу. Затем каждый написал сумму чисел его соседей слева и справа. Доказать, что хотя бы кто-нибудь не написал 1985.

17. Можно ли разрезать выпуклый 17-угольник на 14 треугольников?

18. Доказать, что сумма $1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots + 1/K$ ни при каком K не является целым числом.

19. Имеется много одинаковых кубиков и шесть красок. Разрешается окрашивать каждый кубик в шесть цветов и приклеивать друг к другу кубики гранями одного цвета. Требуется склеить параллелепипед размером $m \times n \times k$, каждая грань которого была бы одного цвета, причём все цвета должны быть разными. Для каких m, n, k это можно сделать?

20. На бесконечной шахматной доске стоит нечётное число фигур. Доказать, что рядом хотя бы с одной фигурой — чётное число соседей (0, 2, 4, 6 или 8).

21. Доказать, что любую сумму больше 7 коп. можно заменить монетами достоинством в 3 и 5 коп.

22. Доказать, что в любом множестве натуральных чисел можно выбрать конечное число таких чисел, чтобы все остальные получались из них с помощью сложения (каждое число может быть использовано несколько раз).

12. Тренажёр

23. Доказать, что для любых двух целых чисел m и n с наибольшим общим делителем d существуют такие целые числа a и b , что $d = am + bn$.

24. Выписать таблицу умножения и сложения для остатков при делении на натуральное число p ($p = 2, 3, 4, \dots, 13$). Для каких p у каждого остатка есть обратный, т. е. такой, что их произведение равно 1 (как остаток)? Сформулировать соответствующую гипотезу для произвольного p и доказать её.

25. Доказать малую теорему Ферма: если p — простое число, то p -я степень любого натурального числа имеет при делении на p тот же остаток, что и само число. Попытайтесь обобщить эту теорему на случай произвольного числа p .

26. Доказать теорему Вильсона: число p просто тогда и только тогда, когда $(p - 1)! + 1$ делится на p .

27. Доказать, что существует миллиард последовательных составных чисел.

28. Множество целых чисел таково, что разность любых двух чисел из этого множества также принадлежит ему. Описать все такие множества.

29. Доказать, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы тринадцати шестнадцатых степеней натуральных чисел.

30. Доказать, что каждое натуральное число разлагается в произведение своих простых множителей, причём единственным образом.

31. Доказать, что шахматный конь не может обойти доску $4 \times k$ так, чтобы, побывав на каждом поле ровно один раз, последним ходом вернуться в исходную клетку.

32. В клетках квадратной таблицы 4×4 расставлены знаки плюс и минус, как показано на рисунке:

+	-	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

Разрешается одновременно менять знак во всех клетках, расположенных в одной строке, в одном столбце или на прямой, параллельной какой-нибудь диагонали (в частности, можно менять знак в любой угловой клетке). Доказать, что, сколько бы мы ни производили таких перемен знака, нам не удастся получить таблицу из одних плюсов.

33. На бесконечной клетчатой доске расставлены в клеточках вещественные числа. Доказать, что найдётся хотя бы одно число, которое не меньше по крайней мере четырёх из восьми окружающих его чисел.

34. Доказать, что из $k^2 + 1$ последовательно записанного числа можно выбрать $k + 1$ число, которые идут либо в порядке убывания, либо в порядке возрастания.

35. Все наборы (любой конечной длины) из двух цифр 0 и 1 каким-то образом разбиты на два класса. Доказать, что любую бесконечную последовательность из нулей и единиц можно разрезать на такие куски, что все они, кроме, может быть, первого куска, принадлежат одному классу.

36. Каждое из натуральных чисел закрашено в один из k цветов. Доказать, что можно найти сколь угодно длинную арифметическую прогрессию конечной длины, все члены которой — одного цвета.

37. Разбить множество натуральных чисел на два подмножества так, чтобы ни одно из них не содержало бесконечную арифметическую прогрессию. Можно ли это сделать для геометрических прогрессий?

38. Семнадцать математиков из разных стран переписываются друг с другом. Каждые два переписываются на одном из трёх языков. Доказать, что найдутся трое, которые переписываются на одном языке.

39. Каждая точка плоскости раскрашена в один из двух цветов. Доказать, что найдётся правильный треугольник, вершины которого одного цвета. Верно ли это для k цветов?

40. На отрезке длиной 1 выбрано несколько маленьких отрезочков и покрашено. Известно, что сумма длин покра-

12. Тренажёр

шенных отрезков превосходит $1/2$. Доказать, что найдутся две покрашенные точки на расстоянии ровно $1/2$.

41. Можно ли сложить кирпич из кубиков разного размера?

42. Последовательность A_k строится по такому закону: $A_{k+1} = |A_k| - A_{k-1}$. Доказать, что, какими бы ни были A_1 и A_2 , последовательность всё равно будет периодической.

43. На множестве целых чисел ввели новую операцию:

$$m * n = \begin{cases} \frac{m+n}{2} + a, & \text{если } m+n \text{ чётно;} \\ \frac{m+n+1}{2} + b, & \text{если } m+n \text{ нечётно} \end{cases}$$

(a, b — фиксированные целые числа). Пусть M — множество чисел, получающееся из нуля с помощью операции $*$. Доказать, что для любых двух чисел из M их сумма также принадлежит M .

44. Можно ли выбрать миллион натуральных чисел так, чтобы никакая сумма нескольких из этих чисел не была полным квадратом?

45. Доказать, что

$$\begin{aligned} \lg \operatorname{tg} 1^\circ + \lg \operatorname{tg} 2^\circ + \dots + \lg \operatorname{tg} 89^\circ &= \\ &= \lg \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 3^\circ \dots \lg \operatorname{tg} 89^\circ. \end{aligned}$$

46. Числа $1, 2, 3, \dots$ разбиты на две группы по k чисел в каждой. Пусть $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_k$ — числа первой группы, записанные в возрастающем порядке, и $b_1 > b_2 > b_3 > \dots > b_k$ — числа второй группы, записанные в убывающем порядке. Доказать, что

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_k - b_k| = k^2.$$

47. Последовательность x_n строится так: $x_1 = 3$, $x_{n+1} = x_n + \sin x_n$. Доказать, что эта последовательность сходится, и вычислить её предел.

48. Существует ли такая бесконечная последовательность натуральных чисел, что любая другая получается из неё вычёркиванием:

- а) некоторых членов;
- б) конечного числа членов?

49. Программист Петя задумал написать программу, которая дала бы возможность вычислительной машине печатать одну за другой цифры десятичной записи числа $\sqrt{2}$. Доказать, что даже если бы машина не ломалась, то Петина затея всё равно бы не удалась, и рано или поздно машина напечатала бы неверную цифру.

50. Можно ли из какой-то точки провести к графику многочлена K -й степени больше, чем k касательных?

51. Доказать, что для любых двух многочленов от одной переменной F_1 и F_2 существует многочлен $g(Y_1, Y_2)$ такой, что $g(F_1, F_2) \equiv 0$. Сформулировать и доказать аналог этого утверждения для большего числа переменных.

52. Каждому натуральному числу $K \leq 100$ поставлено в соответствие некоторое натуральное число $F(K)$, также не превосходящее 100. Строится последовательность: $A_1 = 1$, $A_2 = F(A_1)$, $A_3 = F(A_2)$, $A_4 = F(A_3)$, ... Докажите, что найдётся номер $N \leq 100$, для которого $A_N = A_{2N}$.

53. Доказать неравенство при $x \geq 0$:

$$\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}.$$

54. Доказать, что если уравнение

$$x^k + ax^{k-1} + bx^{k-2} + \dots = 0$$

имеет ровно k различных решений, то $a^2 > \frac{2k}{k-1}b$.

55. Решить уравнение $2x^x = \sqrt{2}$.

56. Доказать, что существует такое простое число p , что $\sqrt{p}^{\sqrt{2}}$ иррационально.

57. Можно ли множество всех натуральных чисел больше 1 разбить на два непустых подмножества так, чтобы для

12. Тренажёр

любых двух чисел a и b из одного множества число $ab - 1$ принадлежало другому?

58. Доказать, что числа a, b, c имеют одинаковый знак тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$ab + bc + ca > 0;$$

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} > 0.$$

59. Найти цифры a и b такие, для которых

$$\sqrt{0,aaaaa\dots} = 0,bbbb\dots$$

60. Найти функцию $f(x, y)$ такую, что неравенство $f(x, y) > 0$ задаёт первый квадрант (не включая оси). Докажите, что $f(x, y)$ не может быть многочленом.

61. Можно ли через каждую точку внутри данного треугольника провести по две прямые так, чтобы никакие три из полученного множества прямых не пересекались в одной точке и никакие две не были параллельны?

62. Выпуклый четырёхугольник разбит диагоналями на четыре треугольника с целыми площадями. Доказать, что площадь четырёхугольника — число составное.

63. Можно ли на числовой прямой расположить три отрезка чётной длины так, чтобы пересечение любых двух из них имело нечётную длину?

64. Длины двух медиан треугольника меньше 1. Может ли его площадь равняться $\log_8 6$?

65. Точка O обладает тем свойством, что любая прямая, проходящая через неё, делит площадь данного многоугольника пополам. Верно ли, что O — центр симметрии?

66. Докажите, что если в треугольнике две биссектрисы равны между собой, то он — равнобедренный.

67. Круг разрезан на несколько частей (отрезками прямых и дугами окружностей — для определённости). Можно ли из них сложить другую выпуклую фигуру?

68. Равносторонний треугольник полностью покрыт пятью меньшими одинаковыми равносторонними треугольниками.

12. Тренажёр

Докажите, что его можно покрыть и четырьмя такими треугольниками.

69. На плоскости расположено K точек. Известно, что расстояние между любыми двумя из них не больше 1 и для любой точки существует другая из этого множества на расстоянии ровно 1. Докажите, что все они лежат в вершинах выпуклого многоугольника.

70. Для каждой двух из трёх произвольных окружностей проведены общие хорды. Доказать, что эти три хорды пересекаются в одной точке.

71. Доказать, что в любой бесконечной десятичной дроби можно так переставить цифры, что полученная дробь станет рациональным числом.

72. Петя и Вася придумали такую игру. Петя задумал число — 1, 2 или 3, а Вася должен отгадать это число, имея право только на один вопрос, причём такой, на который Петя может ответить лишь «да», «нет» или «не знаю». Помогите Васе.

73. Петя и Вася затеяли игру на шахматной доске размером $K \times P$ по следующим правилам: сначала Петя ставит на свободную клетку шахматного коня, затем Вася делает из этой клетки ход конём по шахматным правилам, потом ход конём делает Петя и так далее. При этом запрещается занимать то место, где конь уже побывал. Кто не сможет сделать очередного хода, считается проигравшим. Кто им окажется?

74. Можно ли связать три карандаша нитями так, чтобы связаны были только их концы, а карандаши не касались друг друга (расстояние между ними — не менее 1 см), но конструкция тем не менее была жёсткой (её можно было подбросить в воздух и поймать такой же)?

75. Все вершины параллелограмма имеют целые координаты. Доказать, что его площадь — целое число. Верно ли аналогичное утверждение в пространстве?

76. Последовательность A_k строится по следующему закону. Произвольное число B разбивается на два любых слагае-

12. Тренажёр

мых. В качестве A_1 берётся их произведение. Затем одно из слагаемых опять делится на два и произведение этих новых слагаемых прибавляется к A_1 . Результатом будет A_2 . Точно так же поступаем и дальше: если B уже представлено в виде суммы нескольких слагаемых, то одно из них разбивается на два и очередное A_k получается из предыдущего прибавлением произведения двух новых слагаемых. Доказать, что если величина наибольшего из слагаемых стремится к нулю, то последовательность A_k имеет предел, зависящий от числа B , но не зависящий от способа разбиения.

77. В городе H , чтобы обойти по кругу вокруг любого перекрёстка, надо чётное число раз перейти дорогу. (В частности, там нет тупиков.) Доказать, что любой замкнутый маршрут по городу H приводит к необходимости чётное число раз пересекать дорогу.

78. В окружности через фиксированную точку O проводятся пары попарно перпендикулярных хорд. Доказать, что сумма квадратов их длин — величина постоянная.

79. В алфавите языка племени Мумбо-Юмбо всего три буквы: A , B и C . Любая комбинация букв обозначает какое-то понятие, причём разные слова могут обозначать одно и то же понятие — быть синонимами. Кроме того, если к синонимам приписать с одинаковой стороны одинаковые буквы, то получившиеся слова тоже будут синонимами. Исследователям удалось установить, что синонимами являются следующие пары: AB и C ; BC и A ; CA и B , но слова AB и BA синонимами не являются. Сколько всего понятий в языке племени Мумбо-Юмбо?

80. Полтора землекопа за полтора часа выкопали полторы ямы. Сколько ям выкопают за два часа два землекопа?

81. Проекция некоторого тела на две разные плоскости — круги. Доказать, что радиусы этих кругов одинаковы.

82. Клоп умеет ползать по любой поверхности (даже переползать через края) и прыгать вертикально вниз, но не умеет плавать. Как спастись от клопа?

12. Тренажёр

83. Вы пускаете мыльные пузыри. Доказать, что в любой момент времени хотя бы один из них виден вам целиком (его не закрывает никакой другой). Верно ли аналогичное утверждение, если пузыри имеют не форму шара, а форму куба?

84. Через точку внутри треугольника проведены три прямые, соединяющие её с вершинами. Отрезки прямых между вершинами и точкой стёрли, так что треугольник разбился на три четырёхугольника. Доказать, что если в два из них можно вписать окружность, то это же верно и для третьего.

85. Решить уравнение

$$x(1 - 2x^2)(8x^4 - 8x^2 + 1) = \frac{1}{8}.$$

86. Назовём слова перестановочными, если два слова, получающихся их склейкой в разном порядке, будут одинаковыми. Например, слова ПАПА и ПА перестановочны: при любой склейке получается ПАПАПА. А вот МЯУ и КИС неперестановочны: слова МЯУКИС и КИСМЯУ различаются. Требуется доказать, что если есть три таких слова, что первое перестановочное со вторым, а второе с третьим, то и первое слово перестановочно с третьим.



НАМЁКИ



13. Намёки

Простейший способ состоит в том, что гадающий с маху раскрывает какую-нибудь книгу и смотрит, о чём идёт речь на открытой странице; что там написано, того и следует ожидать.

Статья «Мантика» из Настольной книги атеиста

В этой совсем коротенькой главе содержатся кратчайшие указания к большинству предложенных задач предыдущей главы.

1. Разность чисел вида $111\dots11000\dots0$, остатки, принцип Дирихле.

2; 3. Принцип Дирихле.

4; 5. Читайте Лемана — «Сборник задач московских олимпиад».

6. Рассмотрите остатки при делении на 20 за три недели.

7. Разбейте квадрат на 25 квадратов.

8. $3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + \dots + 3 \cdot 6 + 7 + 1$ больше 70. Принцип Дирихле здесь играет роль миража.

9. Покрасьте совпадающие цифры.

10. Постройте бесконечную башню и найдите одинаковые слои.

11. Ищите инвариант!

12. Обратите задачу: один стакан разлить поровну.

13. Рассмотрите представление чисел последовательностями, как в главе об обозначениях, по показателям простых делителей, их — по модулю 2 и выпишете друг под другом.

14. Докажите, что сумма номеров мест чётна и нечётна одновременно.

15. Граф с нечётными вершинами.

16. Чётность.

18. Рассмотрите максимальную степень двойки.

19. Похожая задача разбиралась в главе о раскраске.

20. См. пункт 15.

21. «Остатки при делении на 3».

13. Намёки

22. Воспользуйтесь 23-й задачей и остатками при делении на a_1 . Покажите, что получится любой.

23. Рассмотрите все такие суммы и воспользуйтесь задачей 28.

24. Гипотеза: p — простое число. Используйте пункт 23.

25. Обобщение — см. про функцию Эйлера в любой книжке по теории чисел или в «Кванте».

26. Перемножьте все остатки: у каждого есть обратный, кроме -1 .

27. $10^9! + K$.

28. Две разности — это сумма, затем найдите минимальное по модулю число. Докажите, что всё на него делится.

29. Рассмотрите остатки при делении на 16 или 17.

31. Две раскраски. Первая — две внутренние полосы чёрные. Вторая — шахматная.

32. Количество минусов в неугловых боковых клетках нечётно.

33. Рассмотрите квадрат 4×4 без угловых клеток.

34. Похожая задача — в главе о раскраске.

35. Покрасьте в один цвет все те места, начиная с которых все конечные последовательности — в первом классе. Другой цвет — то же самое для второго класса. Рассмотрите случай конечного и бесконечного числа покрашенных мест.

37. Каждое подмножество должно содержать достаточно много подряд идущих чисел.

38. Используйте первую задачу главы о графах.

39. Рассмотрите правильный шестиугольник с центром.

40. Сверните отрезок в окружность и симметрично отразите.

41. Нет. Докажите, что на самом маленьком нижнем кубике должен стоять ещё меньший, а на нём — ещё меньше и так далее.

42. Последовательность периодична с периодом 9.

43. Докажите, что $m * n + k = (m + k) * (n + k)$, а затем индукцией по длине представления u , что $x + u$ лежит в M .

13. Намёки

45. $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$.
46. Попробуйте поменять два числа.
47. У этой последовательности есть неподвижная точка — число π .
48. а) — да, б) — нет.
49. У машины конечное число состояний, и она способна напечатать только периодическую дробь.
50. Нельзя, так как многочлен K -й степени имеет не более чем K корней.
53. Проинтегрируйте несколько раз неравенство $\cos x \leq 1$.
54. Производная и индукция.
55. Угадайте два корня и покажите, что больше нет.
56. Иначе

$$(2^{\sqrt{2}/2})^{\sqrt{2}/2}$$

должно быть рациональным.

58. Устройте перебор.
59. Сверните дроби как прогрессии.
60. Докажите, что если $f(x, y)$ — многочлен, то он делится на $xу$, и найдите многочлен меньшей степени.
61. Касательные к окружности.
62. Попарные произведения противоположных площадей равны.
63. Нет.
64. Докажите, что меньший треугольник, образованный медианами, имеет площадь не больше $1/9$.
66. Читайте Г. Кокстера «Новые встречи с геометрией».
68. Рассмотрите три вершины и три середины.
69. Пересеките круги.
70. Три полусферы, построенные по окружностям, пересекаются в одной точке.
71. Те цифры, которые встречаются конечное число раз, надо расположить впереди, остальные — чередовать.
72. «Я тоже задумал одно из чисел: 1,5 и 2,5. Твоё число больше?»

13. Намёки

73. Всё зависит от чётности $K \times P$. При чётности доску надо разбить на пары.

74. Да. В идеале достаточно 9 нитей, но лучше использовать все 12.

75. Если (a, b) , (x, y) — координаты направляющих векторов, то площадь равна модулю числа $ay - bx$.

76. Рассмотрите равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом B . Его площадь и есть искомый предел.

77. Докажите по индукции, что карту города можно раскрасить в два цвета.

79. Ответ — 8.



ВМЕСТО ЗАКЛЮЧЕНИЯ

К переводу своей статьи известный английский математик Джон Литлвуд написал примечания: «Я весьма благодарен проф. Риссу за перевод этой статьи. Я весьма благодарен проф. Риссу за перевод предыдущего примечания. Я весьма благодарен проф. Риссу за перевод предыдущего примечания».

Почему этим Литлвуд и ограничился?

Факультативный курс математики для 6—7-х классов в задачах (Ленинград, 1985)

Один из моих друзей — по профессии живописец, и мне не раз случалось заходить в его мастерскую. Каждый раз он показывал мне свои новые работы и спрашивал моё мнение о них. Будучи совершенным дилетантом в живописи, я, тем не менее, совершенно беззастенчиво критиковал его. К моему величайшему удивлению, после моей критики он часто исправлял сделанное. Надо ли говорить о том, что через некоторое время я почувствовал себя тонким знатоком искусства. А однажды я даже спросил его: «Как же так, ты — профессионал, а я в живописи — нуль. Тем не менее, я говорю тебе о недостатках, и ты их исправляешь. Неужели ты сам их не видишь?» Его ответ навсегда лишил меня иллюзий: «Конечно, вижу, — спокойно сказал он, — но если даже *ты* их замечаешь, значит, это надо исправлять!»

Теперь, находясь в роли автора, я хотел бы воспользоваться опытом моего друга. Я буду благодарен всем читателям, которые пришлют мне свои замечания, тем более, что критиковать есть что. Мне было бы приятно получить не только критику, но и предложения по усовершенствованию текста или пожелания по включению в него иных тем и методов.

Рукопись была прочитана не только редакторами и рецензентами, но и добровольно взявшими на себя такую ношу А. Е. Колесниковым, Е. Н. Захаровой, С. Е. Рукшиным. Контрольным читателем, перерешавшим большую часть задач, был десятиклассник Вадим Зудилин. Все они внесли множество ценнейших предложений по усовершенствованию книги. Им — особая благодарность.

Я весьма признателен также тем, с кем обсуждались только фрагменты книги. Вообще, я благодарен всем друзьям и близким, которые мужественно выдержали тот период времени, когда со мной нельзя было говорить ни о чём другом, кроме этой книги.

И о задачах. Их по ходу текста разбросано более двухсот. Часть из них являются оригинальными (около одной пятой всего количества), другие — либо широко известными, либо извлечёнными из процитированных в книге источников, в первую очередь из двух брошюр заочной математической школы при ЛГУ: одной, процитированной в эпиграфе к этой главе, а другой — в главе о раскраске. Наконец, очень много задач было взято из замечательной книги Н. Б. Васильева и А. П. Савина «Избранные задачи математических олимпиад», давно ставшей библиографической редкостью.

И последнее. Автор просит извинения за то, что его «я» слишком часто проскальзывало на этих страницах, пусть и не всегда от первого лица. Да и вообще за всё то, что могло шокировать читающего, ибо это издержки огромного желания сделать книгу интересной. Насколько это удалось — судить самому читателю.



ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
1. На газете до Венеры	7
2. Искусство обозначать, или принцип «бьяки»	17
3. Умение сделать вид	43
4. Как бороться с модулями, или искусство перебора	65
5. О противных доказательствах	91
6. Как считать, чтобы не считать (принцип Дирихле)	105
7. Остатки остатков	127
8. Их сиятельство граф	133
9. Хоть что-то, но неподвижно!	159
10. Живописцы, окуните ваши кисти	175
11. Кирпич в луже и таинство перевода	187
12. Тренажёр	211
13. Намёки	223
Вместо заключения	229

Научно-популярное издание

Виктор Анатольевич Уфнаровский
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АКВАРИУМ

Художник *Б. К. Свинорез*
Тех. редактор *Д. Е. Щербаков*

Подписано в печать 21/1 2011 года. Формат 60 × 90/16.
Бумага офсетная №1. Печать офсетная. Объём 14,5 печ. л.
Гарнитура ITC Charter. Тираж 2000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра непрерывного
математического образования.

119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.

Тел. (499) 241 74 83.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ООО «Принт Сервис Групп».
Москва, 2-й Лихачёвский пер., 7.